目次

1-1 負數與數線(1)

重點整理

1.整數包含正整數、0、負整數。

2.數線三要素：原點、正向、單位長。

3.(1)在正數中，離原點愈遠的點(愈右側)，其值愈大。

(2)在負數中，離原點愈遠的點(愈左側)，其值愈小。

4.數線上的點所代表的數稱為該點在數線上的坐標，若 P 點的坐標為 a，可記為 $P(a)$。

5.若將數線上某兩點之間分成 n 等分，則需要 $n-1$ 個等分點。

6.(1)若一個分數為正真分數，則其在數線上的位置必為 0 與 1 之間。

(2)若一個分數為負真分數，則其在數線上的位置必在 0 與 -1 之間。

題型 1 等分點的繪製

若在數線上要標示出 2.36 的點，則至少需在 2 與 3 之間作 __24__ 個等分點。

$2.36=2\frac{36}{100}=2\frac{9}{25}$

要在 2 與 3 之間作 25 等分

需作 $25-1=24$ 個等分點

題型 2 正負數的記法

在同一天中，若下午 4 點記為 0，下午 6 點記為 $+6$，則早上 11 點 30 分可記為 __-13.5__ 。

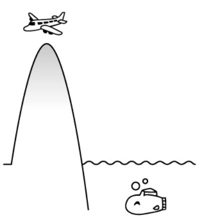
每過一小時多記 $6\div(6-4)=3$

而早上 11 點 30 分較下午 4 點提早 4.5 個小時

故可記為 $-(4.5\times3)=-13.5$

題型 3 生活中的正負數

如圖，若海平面記為 0，海平面下 200 公尺潛艦的位置記為 -4，山的高度記為 $+10$，飛機的高度記為 $+13$，則飛機通過山的正上方時，與山頂相距 __150__ 公尺。



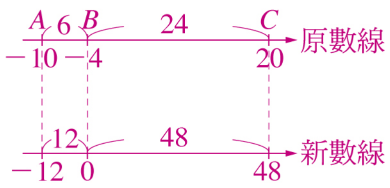
由題意可知每 $\frac{200}{4}=50$ 公尺記為 1

且海平面之上為正向、海平面之下為負向

故飛機與山頂相距 $50\times(13-10)=150$ 公尺

題型 4 數線活用題

數線上有 A、B、C 三點，其所代表的數分別為 -10、-4、20。若以 B 為新原點，以原單位長的 $\frac{1}{2}$ 倍為新單位長，則 A 點表示的數變為 __-12__ ，C 點表示的數變為 __48__ 。



A 點表示的數變為 $-(6\times2)=-12$

C 點表示的數變為 $+(24\times2)=48$

1-1 負數與數線(2)

重點整理

1.三一律：對於任意兩數 a、b，三種關係 $a>b$、$a<b$、$a=b$ 中必有一種成立。

2.遞移律：(1)若 $a>b$ 且 $b>c$，則 $a>c$(即 $a>b>c$)。

(2)若 $a<b$ 且 $b<c$，則 $a<c$(即 $a<b<c$)。

(3)若 $a=b$ 且 $b=c$，則 $a=c$(即 $a=b=c$)。

3.相反數：數線上與原點距離相等，但方向相反的兩個點所代表的數，稱為相反數，而兩個相反數的和必為 0。

4.絕對值：一個數在數線上所代表的點與原點的距離，稱為這個數的絕對值。

5.(1)離原點愈遠的點，其所代表的數的絕對值也愈大。

(2)離原點愈近的點，其所代表的數的絕對值也愈小。

6.(1)在正數中，絕對值中的數愈大，其值愈大。

(2)在負數中，絕對值中的數愈大，其值愈小。

題型 1 遞移律的運用

已知 $a-b<0$，$c-a<0$，$d-b>0$，試比較 a、b、c、d 四數的大小：$\underline{\quad d>b>a>c \quad}$。

由 $\begin{cases} a-b<0 \\ c-a<0 \\ d-b>0 \end{cases}$ **可得** $\begin{cases} a<b \\ c>a \\ d>b \end{cases} \Rightarrow d>b>a>c$

題型 2 相反數的概念運用

比 $-13\dfrac{2}{5}$ 大，且比 $12\dfrac{2}{5}$ 小的所有整數的和為 $\underline{\quad -13 \quad}$。

所求 $=(-13)+(-\cancel{12})+(-\cancel{11})+\cdots+(-\cancel{2})+(-\cancel{1})+0+\cancel{1}+\cancel{2}+\cdots+\cancel{11}+\cancel{12}$

$=-13$

題型 3 絕對值的和

已知 a、b 均為整數，且 $|a|+|b|=8$，則 a 的最小值可為 $\underline{\quad -8 \quad}$，$b$ 的最大值可為 $\underline{\quad 8 \quad}$。

因為 $|a|\geq 0$，$|b|\geq 0$

故當 $|a|=8$ 時，即 $a=-8$ 時，a 有最小值

當 $|b|=8$ 時，即 $b=8$ 時，b 有最大值

題型 4 絕對值的個數

若絕對值不大於 a 的整數有 13 個，且 a 為正整數，則 $a=\underline{\quad 6 \quad}$。

由題意可知，這 13 個整數為

0、±1、±2、±3、±4、±5、±6

又因其絕對值均不大於 6

且 a 為正整數，故 $a=6$

1-2 整數的加減(1)

重點整理

1.減去一個數就等於加上這個數的相反數，故其作法即同加法運算的運算原則。

2.(1)加法運算規則：①$a+(-b)=a-b$ 或 $-(b-a)$。

②$(-a)+b=b-a$ 或 $-(a-b)$。

③$(-a)+(-b)=-(a+b)$。

(2)減法運算規則：①$a-(-b)=a+b$。

②$(-a)-b=-(a+b)$。

③$(-a)-(-b)=-a+b$。

3.(1)括號前若為「＋」號，則去括號後，各項都不用變號。

(2)括號前若為「－」號，則去括號後，各項都要變號。

題型1 整數的加減法

求 $-8-\{-7-[-3-(2-7)]-3\}-5=$ ＿＿-1＿＿。

原式 $=-8-\{-7-[-3-(-5)]-3\}-5$

$=-8-\{-7-[-3+5]-3\}-5$

$=-8-\{-7-2-3\}-5$

$=-8-\{-12\}-5$

$=-8+12-5$

$=-1$

題型2 基準題型

瓊誼在某次段考中，以英文科為基準，各科分數登記為下表，則數學應記為＿＿-3＿＿。

科目	國	英	數	自	社	平均
差值(分)	-8	0	?	-4	5	-2

由 $-8+0+$ 數學 $+(-4)+5=(-2)\times5$

$\Rightarrow -7+$ 數學 $=-10$

$\Rightarrow$ 數學 $=-3$

題型3 整數加減法與絕對值

若 $5|a+3|+2|b+2|+|c+4|=1$，且 a、b、c 皆為整數，則 $a=$＿＿-3＿＿，$b=$＿＿-2＿＿，$c=$＿＿-3 或 -5＿＿。

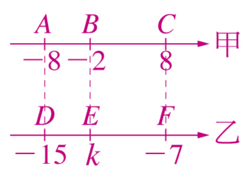
由絕對值前面的係數 $5>1$，$2>1$ 可知

$|a+3|=0\Rightarrow a=-3$ 及 $|b+2|=0\Rightarrow b=-2$

且 $|c+4|=1\Rightarrow c+4=\pm1\Rightarrow c=-3$ 或 -5

題型4 整數加減法與數線活用

有甲、乙兩條數線，甲數線上有 A、B、C 三個點，其所代表的數依序為 -8、-2、8；乙數線上也有 D、E、F 三個點，其所代表的數依序為 -15、k、-7。若將兩數線疊合在一起，剛好 A、D 兩點重合，B、E 兩點重合，C、F 兩點重合，則 $k=$＿＿-12＿＿。(註：甲、乙兩數線的單位長不同)



由 $\overline{AC}=8-(-8)=16$；$\overline{DF}=-7-(-15)=8$

可知甲數線的單位長為乙數線的一半

再由 $\overline{AB}=-2-(-8)=6$，可知 $\overline{DE}=\frac{1}{2}\times6=3$

故 $k=-15+3=-12$

1-2 整數的加減(2)

重點整理

1.(1)若 $a>b$，則 $|a-b|=a-b$。

(2)若 $a=b$，則 $|a-b|=0$。

(3)若 $a<b$，則 $|a-b|=-(a-b)=b-a$。

2.數線上有 $A(a)$、$B(b)$兩點，則 A、B 兩點間的距離

$\overline{AB}$ ＝大的數－小的數

＝右邊的點所代表的數－左邊的點所代表的數

$=|a-b|$(或 $|b-a|$)

題型 1 絕對值的化簡

若 $5>a>2$，則 $|a-1|+|a-6|=$ ___5___。

由 $a>2$ 可知 $a-1>0$，故 $|a-1|=a-1$

由 $a<5$ 可知 $a-6<0$，故 $|a-6|=6-a$

所求 $=a-1+6-a=5$

題型 2 兩點間的距離

已知 a、b、c 均為大於 3 的正數，且 $|a-1|=|b-2|=|c-3|$，試比較 a、b、c 的大小：___$a<b<c$___。

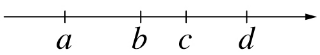
由題意可知 a 與 1 的距離 $=b$ 與 2 的距離 $=c$ 與 3 的距離

又因為 a、b、c 均為大於 3 的正數

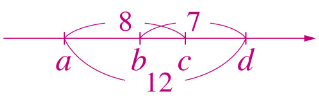
故可知 $a<b<c$(如上圖所示)

題型 3 兩點間的距離活用

下圖為數線上四個點的位置關係，且它們表示的數分別為 a、b、c、d。若 $|a-c|=8$，$|b-d|=7$，$|a-d|=12$，則 $|b-c|=$ ___3___。



由題意可得



由上圖可知 $|b-c|=8+7-12=3$

題型 4 絕對值的特殊題型

已知 a、b 均為整數，若 $5|a-2|+|b+3|=7$，請列出(a,b)的所有情況，以數對表示：___$(2,4)$、$(2,-10)$、$(3,-1)$、$(3,-5)$、$(1,-1)$、$(1,-5)$___。

(1)令 $|a-2|=0$，$|b+3|=7$

則 $a=2$；$b=4$ 或 -10

(2)令 $|a-2|=1$，$|b+3|=2$

則 $a=3$ 或 1；$b=-1$ 或 -5

由(1)(2)可知(a,b)的所有情況為

$(2,4)$、$(2,-10)$、$(3,-1)$、$(3,-5)$、$(1,-1)$、$(1,-5)$

1-3 整數的乘除與四則運算(1)

重點整理

1.同號數相乘或相除會得正數；異號數相乘或相除會得負數。

亦即「正正得正」,「正負得負」,「負正得負」,「負負得正」。

2.偶數個負數連乘除得正；奇數個負數連乘除得負。

3.四則運算的原則：

(1)若只有加減或只有乘除時，通常是由左而右計算，除非使用了加、乘法的交換律或結合律。

(2)若混有加減乘除四則運算時，要先做乘除，再做加減。

(3)若混有指數或絕對值的部分，則觀察其位置後再決定是先算還是後算。

(4)若遇有多重括號時，應先算小括號，再算中括號，最後算大括號。

題型 1 四則運算

若[(－11＋3)□4－(－6)]÷(－4)＝－1，則□內填入「＋」、「－」、「×」、「÷」哪一個運算符號時，原式才會成立？__÷__。

將「＋」、「－」、「×」、「÷」分別代入原式，各得其值為

$[(-11+3)+4-(-6)]\div(-4)=-\frac{1}{2}$

$[(-11+3)-4-(-6)]\div(-4)=\frac{3}{2}$

$[(-11+3)\times4-(-6)]\div(-4)=\frac{13}{2}$

$[(-11+3)\div4-(-6)]\div(-4)=-1$

故□內填入「÷」才是正確的

題型 2 定義新運算

若定義＊為一個新的運算符號，其規則如下：$a*b=(-a+b)(a-b)$，則$(-7)*(-3)=$__-16__。

所求$=[-(-7)+(-3)][-7-(-3)]$

$=(7-3)(-7+3)$

$=4\times(-4)$

$=-16$

題型 3 應用題型

若有 8 個人結伴搭火車出遊，但只有買到 5 張坐票，3 張站票。在 4 個小時的車程中，8 人輪流坐這 5 個座位，則平均每個人坐在位子上的時間為__150__分鐘。

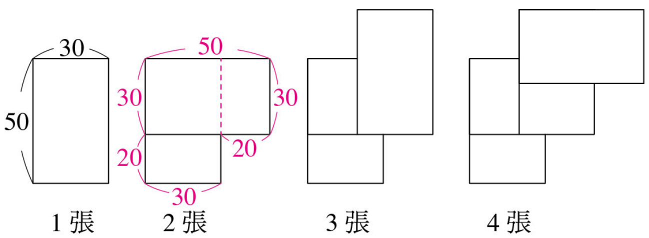
5 張坐票可提供的座位時間共 $5\times(4\times60)=1200$ 分鐘

將其平均分給 8 個人

每人平均可分到 $1200\div8=150$ 分鐘

題型 4 規律判斷

將長 50 公分、寬 30 公分的長方形紙張，以下圖的方式疊在桌面上，疊完 16 張後，在桌面上所覆蓋的面積為__10500__平方公分。



疊 1 張所覆蓋的面積為 50×30

疊 2 張所覆蓋的面積為 $50\times30+20\times30$

疊 3 張所覆蓋的面積為 $50\times30+20\times30+20\times30$

⋮

疊 16 張所覆蓋的面積為 $50\times30+(16-1)\times(20\times30)$

$=10500$ 平方公分

1-3 整數的乘除與四則運算(2)

重點整理

1.(1)若 $a \times b>0$，且 $a+b>0$，則 $a>0$，$b>0$。

(2)若 $a \times b>0$，且 $a+b<0$，則 $a<0$，$b<0$。

(3)若 $a \times b<0$，且 $a-b>0$，則 $a>0$，$b<0$。

(4)若 $a \times b<0$，且 $a-b<0$，則 $a<0$，$b>0$。

2.(1)加法的交換律：$a+b=b+a$。

(2)加法的結合律：$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b$。

3.(1)乘法的交換律：$a \times b=b \times a$。

(2)乘法的結合律：$a \times b \times c=(a \times b) \times c=a \times (b \times c)=(a \times c) \times b$。

(3)乘法對加減法的分配律：

左分配：$a \times (b+c)=a \times b+a \times c$；$a \times (b-c)=a \times b-a \times c$。

右分配：$(a+b) \times c=a \times c+b \times c$；$(a-b) \times c=a \times c-b \times c$。

4.提公因數：$a \times b+a \times c=a \times (b+c)$；$a \times b-a \times c=a \times (b-c)$。

題型 1　替換求值題型

若甲$\times 576=2080$，則$(5-$甲$)\times 576-$甲$\times 57.6$
$=$ <u>592</u> 。

原式$=5\times 576-$甲$\times 576-$甲$\times 57.6$
$=2880-2080-208$
$=592$

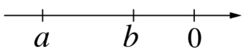
題型 2　提公因數

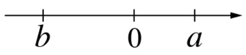
求$(-999)\times 27+999\times(-53)-999\times 19+(-999)$
$=$ <u>-99900</u> 。

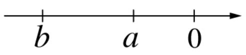
原式$=(-999)\times 27+(-999)\times 53+(-999)\times 19+(-999)$
$=(-999)\times(27+53+19+1)$
$=-999\times 100=-99900$

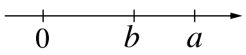
題型 3　正負數的判斷

有 a、b 兩個數，若滿足 $a+b<0$，$a-b>0$，$a\times b<0$，則哪一個選項的圖示最有可能是 a、b 在數線上的位置？ <u>(B)</u> 。

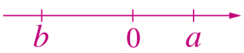
(A)


(B)


(C)


(D)


由 $a-b>0$ 可知 a 必在 b 的右側
又由 $a\times b<0$ 可知 a、b 分別在原點的左右兩側
最後由 $a+b<0$ 可知 b 離原點較 a 遠

故(B)


為最有可能的圖示

題型 4　絕對值與正負數的判斷

若 $a\times b<0$，且 $a+b>0$，$|a|>|b|$，則 $a-b$ <u>$>$</u> 0 (填$>$、$=$、$<$)。

由 $a\times b<0$ 可知 a、b 異號
又由 $a+b>0$ 且 $|a|>|b|$ 可知 a 離原點較遠
且 a 在正向，b 在負向，如下圖所示

故 $a-b>0$

1-4 指數記法與科學記號(1)

重點整理

1.設 a 為任意數，則 $\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ 個 }a}$ 可記為 a^n，讀作「a 的 n 次方」，其中 a 稱為底數，n 稱為指數或次方。

2.$(\text{負數})^{\text{偶次方}}>0$，$(\text{負數})^{\text{奇次方}}<0$。

3.$(-1)^{\text{偶次方}}=1$，$(-1)^{\text{奇次方}}=-1$。

4.指數型的大小比較：先判斷各指數乘開後為正數還是負數，正數必較負數大。

題型 1 (−1)的次方

設 n 為正整數，則 $(-1)^n\times(-1)^{n+1}\times(-1)^{n+2}\times(-1)^{n+3}=$ __1__。

若 n 為奇數，則原式 $=(-1)\times1\times(-1)\times1=1$

若 n 為偶數，則原式 $=1\times(-1)\times1\times(-1)=1$

題型 2 含乘方的運算

設 n 為偶數，則 $(-3)^n\times(-2)^{n+2}\times(-2)^{n+1}+(-1)^{n+2}\times(-3)^{n+1}$ 的值是正數還是負數？

答：__負數__。

因為 $(-3)^n>0$、$(-2)^{n+2}>0$、$(-2)^{n+1}<0$

所以 $(-3)^n\times(-2)^{n+2}\times(-2)^{n+1}<0$

又 $(-1)^{n+2}>0$、$(-3)^{n+1}<0$

所以 $(-1)^{n+2}\times(-3)^{n+1}<0$

故 $(-3)^n\times(-2)^{n+2}\times(-2)^{n+1}+(-1)^{n+2}\times(-3)^{n+1}$ 的值為負數

題型 3 指數型的大小比較

比較 $(-6)^{50}$、$(-6)^{51}$、-6^{50}、-6^{51} 的大小：

$(-6)^{50}>-6^{50}>-6^{51}=(-6)^{51}$。

$(-6)^{50}>0$

$(-6)^{51}<0$

$-6^{50}<0$

$-6^{51}=(-6)^{51}=(-6^{50})\times6<-6^{50}$

所以 $(-6)^{50}>-6^{50}>-6^{51}=(-6)^{51}$

題型 4 指數型的大小比較

試比較 $a=(-3)^5\times(-5)^3\times(-7)^4$

$b=(-3)^4\times(-5)^5\times(-7)^3$

$c=(-3)^5\times(-5)^4\times(-7)^3$

的大小：__$b>a>c$__。

$a=(-3)^4\times(-5)^3\times(-7)^3\times[(-3)\times(-7)]$

$b=(-3)^4\times(-5)^3\times(-7)^3\times(-5)^2$

$c=(-3)^4\times(-5)^3\times(-7)^3\times[(-3)\times(-5)]$

因為 $\begin{cases}(-3)\times(-7)=21>0\\(-5)^2=25>0\\(-3)\times(-5)=15>0\end{cases}$

又因為共同部分 $(-3)^4\times(-5)^3\times(-7)^3>0$

故 a、b、c 均大於 0

由上可知 $b>a>c$

1-4 指數記法與科學記號(2)

重點整理

1.當 n 為正整數時，$\frac{1}{10^n}$ 可記為 10^{-n}，而 $10^0=1$。

2.若將一個正數寫成 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\le a<10$，n 為整數，則我們稱其為「科學記號表示法」。

3.若某數 b 寫成科學記號 $a\times10^n$，則：

(1)若 $b\ge1$，則 n 為正整數或 0，此時 b 為 $n+1$ 位數。

(2)若 $0<b<1$，則 n 為負整數，此時 b 自小數點以下第 n 位始不為 0。

4.科學記號的大小比較：當指數不同時，指數較大者其值也較大；而當指數相同時，則前面的數較大者，其值也較大。

例：(1)指數不同時，比較指數大小即可：$2\times10^5>7\times10^4>8\times10^3$。

(2)指數相同時，比較前面的數大小即可：$8\times10^5>7\times10^5>6\times10^5$。

題型 1　10 的次方

若 $a+a\times10^{-2}=b-b\times10^{-2}=c+c\times10^{-3}=d-d\times10^{-3}$，且 a、b、c、d 均為正數，則 a、b、c、d 的大小關係為 $\underline{a<c<d<b}$。

$a+a\times10^{-2}=b-b\times10^{-2}=c+c\times10^{-3}=d-d\times10^{-3}$

$1.01a=0.99b=1.001c=0.999d$

因為 1.01 > 1.001 > 0.999 > 0.99

所以 $a<c<d<b$

題型 2　指數的變動

若 $80500\times10^{-8}=8.05\times10^a=0.0805\times10^b$，則 $a+b=\underline{\quad -6\quad}$。

由 $80500\times10^{-8}=0.000805=8.05\times10^{-4}$

可知 $a=-4$

再由 $8.05\times10^{-4}=0.000805=0.0805\times10^{-2}$

可知 $b=-2$

故所求 $a+b=(-4)+(-2)=-6$

題型 3　不等式的判斷活用

設 a 為正整數，且 $32.7\times10^{-13}<a\times10^{-14}<3.29\times10^{-12}$，則 $a=\underline{\quad 328\quad}$。

原式 $\Rightarrow 327\times10^{-14}<a\times10^{-14}<329\times10^{-14}$

又因為 a 為正整數，故 a 必為 328

題型 4　科學記號比大小

空氣中懸浮粒子的粒徑大小若小於或等於 2.5×10^{-6} 公尺，就稱為細懸浮微粒。已知：
A 懸浮粒子的粒徑大小為 1.25×10^{-5} 公尺，
B 懸浮粒子的粒徑大小為 2.8×10^{-7} 公尺，
C 懸浮粒子的粒徑大小為 8.4×10^{-6} 公尺，
D 懸浮粒子的粒徑大小為 1.9×10^{-6} 公尺，則哪些屬於細懸浮微粒？答：$\underline{\quad B、D\quad}$。

$2.8\times10^{-7}<1.9\times10^{-6}<2.5\times10^{-6}<8.4\times10^{-6}<1.25\times10^{-5}$

所以 B、D 屬於細懸浮微粒

2-1 因數與倍數(1)

重點整理

1. 因數、倍數的意義：a、b、c 為整數，且 $b\neq 0$，$c\neq 0$，若 $a=b\times c$，則 a 為 b、c 的倍數，b、c 為 a 的因數。
2. (1) 2 的倍數判別法：若一個整數的個位數字為 0、2、4、6、8，則這個整數即為 2 的倍數。
   (2) 5 的倍數判別法：若一個整數的個位數字為 0、5，則這個整數即為 5 的倍數。
   (3) 4 的倍數判別法：若一個整數的末兩位數字為 4 的倍數，則這個整數即為 4 的倍數。
   (4) 3 的倍數判別法：若一個整數的各位數字和為 3 的倍數，則這個整數即為 3 的倍數。
   (5) 9 的倍數判別法：若一個整數的各位數字和為 9 的倍數，則這個整數即為 9 的倍數。
   (6) 11 的倍數判別法：若一個整數的奇數位數字和與偶數位數字和的差是 11 的倍數，則這個整數即為 11 的倍數。

題型 1 因數判斷

在 6、30、75、450 這四個數中，應去掉 __75__，才能使剩下的三個數中，任取兩個數時，較小的數恆為較大的數的因數。

(1)若去掉 6，剩 30、75、450，則此時 30 不是 75 的因數
(2)若去掉 30，剩 6、75、450，則此時 6 不是 75 的因數
(3)若去掉 75，剩 6、30、450，
　則此時 6 為 30、450 的因數，30 也為 450 的因數
(4)若去掉 450，剩 6、30、75，則此時 6 不是 75 的因數

題型 2 列出所有正因數乘積組合

已知 a、b 均為正整數，且 $a\geq b\geq 3$，若 $a\times b=48$，則 a、b 共有 __3__ 種不同的組合。

$$
\begin{aligned}
& \quad a\times b \\
48 &= \left.\begin{array}{l}1\times 48\\ 2\times 24\\ 3\times 16\\ 4\times 12\\ 6\times 8\end{array}\right\}\text{未符合 } a\geq b \\
&= \left.\begin{array}{l}8\times 6\\ 12\times 4\\ 16\times 3\end{array}\right\}\text{共 3 種符合} \\
&= \left.\begin{array}{l}24\times 2\\ 48\times 1\end{array}\right\}\text{未符合 } b\geq 3
\end{aligned}
$$

題型 3 倍數判斷

若五位數 88□57 除以 22 的餘數為 3，則□＝ __1__ 。

可知 88□54 除以 22 必整除
故 88□54 必為 11 的倍數
由(8＋□＋4)－(8＋5)
　＝(12＋□)－13
　＝□－1
為 11 的倍數
故□＝1

題型 4 應用題型

怡仁用 40 張大小相同且邊長為 3 公分的正方形色紙，拼成各種不同形狀的長方形，且沒有剩下，則周長最大者為 __246__ 公分，最小者為 __78__ 公分。

40＝寬×長
　＝1×40
　＝2×20
　＝4×10
　＝5×8
則周長最大者為 $2\times(1+40)\times 3=246$ 公分
　周長最小者為 $2\times(5+8)\times 3=78$ 公分

2-1 因數與倍數(2)

重點整理

1.(1)質數：一個大於 1 的整數，如果除了 1 和它本身之外，沒有其他的正因數，則稱這個整數為質數。

(2)合數：一個大於 1 的整數，如果除了 1 和它本身之外，還有其他的正因數，則稱這個整數為合數。

2.質因數：一個整數的因數如果是質數，則這個因數就是這個整數的質因數。

3.質因數分解：每一個合數都可以分解成它的質因數的連乘積，其中分解的過程即稱為質因數分解。

4.標準分解式：將一個合數做質因數分解，若按照質因數的大小，由小到大排列，並將相同質因數的乘積寫成指數的形式，則這樣的表示法稱為標準分解式。

題型 1　質數判別

已知 $a+37=b+26=c+32$，且 a、b、c 均為質數，則 $a=$__2__，$b=$__13__，$c=$__7__。

因為 37 為奇數，26、32 均為偶數

且 b、c 為相異質數，故 b、c 均為奇數，a 必為偶數

亦即 a 為質數中唯一的偶數 2

可得 $2+37=b+26=c+32$

解得 $b=13$，$c=7$

題型 2　質因數判別

$20\times21\times22\times\cdots\times29\times30$ 共有__8__個相異的質因數。

小於 20 的質數 2、3、5、7、11、13、17、19 中

除了 17、19 之外，其餘均為

$20\times21\times22\times\cdots\times29\times30$ 的質因數

另外再加上 21～30 的質數 23、29

故該數有 2、3、5、7、11、13、23、29

共 8 個相異的質因數

題型 3　質因數分解的活用

景陽自 12～18 的整數中，任意挑選三數，若此三數的乘積為 2496，則此三數為__12、13、16__。

$2496=2^6\times3\times13$

$=2^4\times(2^2\times3)\times13$

$=16\times12\times13$

故三數為 12、13、16

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2496 \\ 2 & 1248 \\ 2 & 624 \\ 2 & 312 \\ 2 & 156 \\ 2 & 78 \\ 3 & 39 \\ & 13 \end{array}$$

題型 4　因數判別的活用

若 $a=12\times14\times16$，則下列哪一個不是 a 的因數？__(A)__。

(A)72　(B)84　(C)96　(D)112

$a=12\times14\times16=(2^2\times3)\times(2\times7)\times2^4=2^7\times3\times7$

(A)$72=2^3\times3^2$ 不為 $2^7\times3\times7$ 的因數

(B)$84=2^2\times3\times7$ 為 $2^7\times3\times7$ 的因數

(C)$96=2^5\times3$ 為 $2^7\times3\times7$ 的因數

(D)$112=2^4\times7$ 為 $2^7\times3\times7$ 的因數

故選(A)

2-2 最大公因數與最小公倍數(1)

重點整理

1.(1)公因數與最大公因數：幾個整數中，其共同的因數稱為它們的公因數；而最大者則稱為最大公因數，以符號( )表示。

(2)公倍數與最小公倍數：幾個整數中，其共同的倍數稱為它們的公倍數；而最小者則稱為最小公倍數，以符號[ ]表示。

2.可由國小所學的短除法來求最大公因數與最小公倍數。

3.(1)幾個整數的最大公因數的所有因數，也恰是這幾個整數的公因數。

(2)幾個整數的最小公倍數的所有倍數，也恰是這幾個整數的公倍數。

4.(1)兩個正整數 a、b，若 a 為 b 的倍數，則$(a , b)=b$。

(2)兩個正整數 a、b，若 a 為 b 的倍數，則$[a , b]=a$。

5.(1)若兩個整數的最大公因數為 1，則稱這兩個數互質。

(2)若兩個整數沒有相同的質因數，則這兩數互質。

題型 1 假設求解題型

設 a、b 均為正整數，已知 $\frac{a}{b}=0.8$，$[a , b]=140$，則 $a=$ __28__，$b=$ __35__。

(1)由 $\frac{a}{b}=0.8=\frac{4}{5}$，可設 $a=4k$，$b=5k$

(2)再由$[a , b]=140 \Rightarrow [4k , 5k]=140$

$k \,\underline{\lfloor 4k , 5k}$

$\quad 4 , 5$

故令 $k\times4\times5=140$

$\Rightarrow k=7$

(3)將 $k=7$ 代回，可得 $a=4k=4\times7=28$

$b=5k=5\times7=35$

題型 2 由已知最大公因數進行假設

若$(21 , a)=7$，$[21 , a]=b$，則 $\frac{b}{a}=$ __3__。

(1)由已知$(21 , a)=7$，可設 $a=7k$

其中 $k\neq0$，且$(3 , k)=1$

(2)將 $a=7k$ 代入$[21 , a]=b$

$\Rightarrow [21 , 7k]=b$

$7 \,\underline{\lfloor 21 , 7k}$

$\quad 3 , k$

故令 $b=7\times3\times k=21k$

(3)所求 $\frac{b}{a}=\frac{21k}{7k}=3$

題型 3 互質概念

若甲、乙均為大於 1 且互質的整數，則：

(1)(6×甲 , 6×乙)＝ __6__。

(2)若甲不為 7 的倍數，則(5×甲 , 35×乙)＝ __5__。

(1) 6 $\underline{\lfloor 6\times甲 , 6\times乙}$

甲 , 乙

又因為(甲 , 乙)＝1，故(6×甲 , 6×乙)＝6

(2) 5 $\underline{\lfloor 5\times甲 , 35\times乙}$

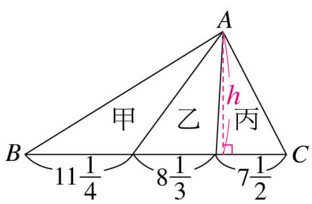
甲 , 7×乙

又因為甲不為 7 的倍數，且(甲 , 乙)＝1

故(甲 , 7×乙)＝1，所求(5×甲 , 35×乙)＝5

題型 4 最大公因數、最小公倍數與分數綜合活用

如圖，已知甲、乙、丙三塊三角形的面積值均為整數，則 A 點到 $\overline{BC}$ 的垂直線段的最小值為 __$\frac{24}{5}$__。



作 A 點到 $\overline{BC}$ 的垂直線段 h

甲面積$=\frac{1}{2}\times11\frac{1}{4}\times h=\frac{45}{8}h$

乙面積$=\frac{1}{2}\times8\frac{1}{3}\times h=\frac{25}{6}h$

丙面積$=\frac{1}{2}\times7\frac{1}{2}\times h=\frac{15}{4}h$

由題意可知 $h=\frac{24}{5}$即為其最小值

2-2 最大公因數與最小公倍數(2)

重點整理

1.除了利用國小所學的短除法來求最大公因數與最小公倍數外，尚可利用各數的標準分解式求得。

(1)最大公因數：取共同的質因數，次方取較小的相乘，此即為最大公因數。

(2)最小公倍數：取所有的質因數，次方取較大的相乘，此即為最小公倍數。

例：$(3^2\times5^3\times7^3\ ,\ 3^2\times5\times7^4\times11)=3^2\times5\times7^3$。

$[3^2\times5^3\times7^3\ ,\ 3^2\times5\times7^4\times11]=3^2\times5^3\times7^4\times11$。

2. 在處理餘數與不足數的題型時，各數若有餘數則要減去，有不足數則要加上，再求其最大公因數，即為所求的餘數，但須注意除數一定要比餘數及不足數大。

3. 排容原理常與最小公倍數出現綜合考題，以求出特定條件的倍數個數。

題型1 利用標準分解式求最大公因數與最小公倍數

若$(a\ ,\ 3^3\times5^2\times11^2)=3^3\times5^2\times11$，且$[a\ ,\ 3^3\times5^2\times11^2]=3^4\times5^2\times7\times11^2$，則 $a=$ __$3^4\times5^2\times7\times11$__ 。

(1)由$(a\ ,\ 3^3\times5^2\times11^2)=3^3\times5^2\times11$

可得知 a 必有因數 3^3、5^2、11

(2)再由$[a\ ,\ 3^3\times5^2\times11^2]=3^4\times5^2\times7\times11^2$

可得知 a 必有因數 3^4、7

(3)由(1)(2)可判斷得知 $a=3^4\times5^2\times7\times11$

題型2 餘數與不足數

以 a 去除 73 餘 1；去除 87 不足 3，則滿足這樣條件的正整數 a 有 __6、9、18__(請全部列出)。

(1) a 為 $73-1=72$ 的因數，也為 $87+3=90$ 的因數

故需先求出$(72\ ,\ 90)=18$

(2) 18 的所有正因數為 1、2、3、6、9、18

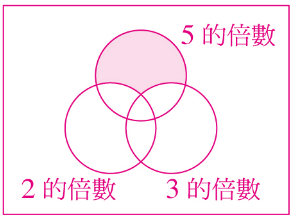
而由於除數 a 應大於餘數 1 與不足數 3

故滿足題意的 a 只有 6、9、18 共三個

題型3 排容原理

從 1 到 100 的正整數中，是 5 的倍數，但不是 2 或 3 的倍數有 __7__ 個。

1～100



1～100 中，5 的倍數有$\left[\frac{100}{5}\right]=20$ 個

是 2 且是 5 的倍數有$\left[\frac{100}{10}\right]=10$ 個

是 3 且是 5 的倍數有$\left[\frac{100}{15}\right]=6$ 個

是 2 且 3 且 5 的倍數有$\left[\frac{100}{30}\right]=3$ 個

故所求為圖中灰色部分共 $20-10-6+3=7$ 個

題型4 排容原理

國一共有 200 位學生，編號依序為 1～200 號，進行體適能抽測。若編號為 2 的倍數要抽測仰臥起坐、5 的倍數要抽測坐地前伸、7 的倍數要抽測分腿開合跳，則恰被抽測兩種項目的同學共有 __33__ 人。

(1)$[2\ ,\ 5\ ,\ 7]=70$，$\left[\frac{200}{70}\right]=2$，故三項全測的有 2 位

(2)$[2\ ,\ 5]=10$，$\left[\frac{200}{10}\right]=20$

故恰抽測仰臥起坐與坐地前伸的有 $20-2=18$ 人

$[2\ ,\ 7]=14$，$\left[\frac{200}{14}\right]=14$

故恰抽測仰臥起坐與分腿開合跳的有 $14-2=12$ 人

$[5\ ,\ 7]=35$，$\left[\frac{200}{35}\right]=5$

故恰抽測坐地前伸與分腿開合跳的有 $5-2=3$ 人

(3)由(2)可知，所求$=18+12+3=33$ 人

2-2 最大公因數與最小公倍數(2)

重點整理

1.分數的大小比較：
(1)同分母的正分數：若分子愈大，其值愈大。
(2)同分子的正分數：若分母愈大，其值愈小。
(3)異分母的正分數：利用擴分或約分將所有分數化成同分母或同分子後，再比較大小。
2.任意幾個分數都可以做加、減運算，其作法如下。
(1)同分母時：分母不變，分子直接相加或相減。
(2)異分母時：將這些分數通分化成同分母後，再相加或相減。
3.去括號法則：括號內的式子可以先計算，若不先計算，則可利用去括號的方式化簡。
(1)括號前為「＋」號：去括號後，各項符號不變。例：$a+(b-c)=a+b-c$。
(2)括號前的「－」號：去括號後，各項符號都要改變。例：$a-(b-c)=a-b+c$。
4.加法的交換律與結合律：若 a、b、c 為任意數，則：
(1)交換律：$a+b=b+a$。
(2)結合律：$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b$。
5.具有規律性的計算題型通常可利用分項對消的方法讓計算過程簡化。

題型 1　正分數大小比較

已知 a、b 均為正整數，且 $b>a$，試比較 $\frac{a}{b}$、$\frac{a+1}{b}$、$\frac{a}{b+1}$、$\frac{a+1}{b+1}$ 四數的大小：$\underline{\frac{a+1}{b}>\frac{a+1}{b+1}>\frac{a}{b}>\frac{a}{b+1}}$。

(1) $\frac{a+1}{b}>\frac{a+1}{b+1}$ (同分子的正分數，若分母愈大，其值愈小)

(2) $\frac{a+1}{b+1}>\frac{a}{b}$ (分子、分母差值一樣的兩個正真分數，若分子、分母愈大，其值也愈大)

(3) $\frac{a}{b}>\frac{a}{b+1}$ (同分子的正分數，若分母愈大，其值愈小)

由上可知 $\frac{a+1}{b}>\frac{a+1}{b+1}>\frac{a}{b}>\frac{a}{b+1}$

題型 2　最簡分數

已知 $100=2^2\times5^2$，若 a 為不大於 100 的正整數，則滿足 $\frac{a}{100}$ 為最簡分數的 a 值共 $\underline{\quad 40 \quad}$ 個。

(1)由 $100=2^2\times5^2$ 可知 100 的質因數為 2、5 兩數

(2)而 1～100 中，2 的倍數有 $[\frac{100}{2}]=50$ 個

5 的倍數有 $[\frac{100}{5}]=20$ 個

$[2,5]=10$，10 的倍數有 $[\frac{100}{10}]=10$ 個

故 1～100 中，是 2 或 5 的倍數共有 $50+20-10=60$ 個

(3)故若 $\frac{a}{100}$ 為最簡分數，則這樣的 a 值共有 $100-60=40$ 個

題型 3　分數加減法與絕對值

$\left|\frac{5}{90}-\frac{5}{89}\right|+\left|\frac{5}{89}-\frac{5}{88}\right|+\left|\frac{5}{88}-\frac{5}{87}\right|+\cdots+\left|\frac{5}{32}-\frac{5}{31}\right|+\left|\frac{5}{31}-\frac{5}{30}\right|=\underline{\quad \frac{1}{9} \quad}$。

原式 $=(\cancel{\frac{5}{89}}-\frac{5}{90})+(\cancel{\frac{5}{88}}-\cancel{\frac{5}{89}})+(\cancel{\frac{5}{87}}-\cancel{\frac{5}{88}})+\cdots+(\cancel{\frac{5}{31}}-\cancel{\frac{5}{32}})+(\frac{5}{30}-\cancel{\frac{5}{31}})$

$=-\frac{5}{90}+\frac{5}{30}=-\frac{5}{90}+\frac{15}{90}=\frac{10}{90}=\frac{1}{9}$

題型 4　分項對消活用題型

已知 $\frac{1}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$，$\frac{1}{30}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$，$\frac{1}{42}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$，…，由此推算 $\frac{1}{11}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}=\underline{\quad \frac{1}{7} \quad}$。

原式 $=\frac{1}{11}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{10\times11}$

$=\cancel{\frac{1}{11}}+(\frac{1}{7}-\cancel{\frac{1}{8}})+(\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{9}})+(\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{10}})+(\cancel{\frac{1}{10}}-\cancel{\frac{1}{11}})$

$=\frac{1}{7}$

2-2 最大公因數與最小公倍數(2)

重點整理

1.分數的乘法：幾個真分數或假分數相乘，只要將分子相乘當作新分子、分母相乘當作新分母，所得到的新分數就是其乘積。

2.互為倒數的兩個數相乘，其積為 1。

3.分數的除法：除以一個不為 0 的數，就是乘以這個數的倒數。

4.具有規律性的計算題型通常可利用分項對消的方法讓計算過程簡化。

題型 1 四則運算活用

$5\times(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1})+7\times(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2})+9\times(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3})+11\times(\frac{1}{5}+\frac{1}{4})+13\times\frac{1}{5}=$ ___35___ 。

原式 $=(\frac{5}{5}+\frac{5}{4}+\frac{5}{3}+\frac{5}{2}+\frac{5}{1})+(\frac{7}{5}+\frac{7}{4}+\frac{7}{3}+\frac{7}{2})+(\frac{9}{5}+\frac{9}{4}+\frac{9}{3})+(\frac{11}{5}+\frac{11}{4})+\frac{13}{5}$

$=\frac{5+7+9+11+13}{5}+\frac{5+7+9+11}{4}+\frac{5+7+9}{3}+\frac{5+7}{2}+\frac{5}{1}$

$=\frac{45}{5}+\frac{32}{4}+\frac{21}{3}+\frac{12}{2}+\frac{5}{1}$

$=9+8+7+6+5$

$=35$

題型 2 分項對消活用題型

$\frac{1}{8\times13}+\frac{1}{13\times18}+\frac{1}{18\times23}+\cdots+\frac{1}{38\times43}+\frac{1}{43\times48}=$ ___$\frac{1}{48}$___ 。

原式 $=\frac{1}{5}(\frac{1}{8}-\frac{1}{13})+\frac{1}{5}(\frac{1}{13}-\frac{1}{18})+\frac{1}{5}(\frac{1}{18}-\frac{1}{23})+\cdots+\frac{1}{5}(\frac{1}{38}-\frac{1}{43})+\frac{1}{5}(\frac{1}{43}-\frac{1}{48})$

$=\frac{1}{5}[(\frac{1}{8}-\cancel{\frac{1}{13}})+(\cancel{\frac{1}{13}}-\cancel{\frac{1}{18}})+(\cancel{\frac{1}{18}}-\cancel{\frac{1}{23}})+\cdots+(\cancel{\frac{1}{38}}-\cancel{\frac{1}{43}})+(\cancel{\frac{1}{43}}-\frac{1}{48})]$

$=\frac{1}{5}(\frac{1}{8}-\frac{1}{48})$

$=\frac{1}{5}\times\frac{5}{48}=\frac{1}{48}$

題型 3 分配律與整除題型

若 $\frac{23}{7}\times(\frac{4}{23}+\frac{a}{69})$ 的值為一個正整數，則 a 被 21 除所得的餘數是 ___9___ 。

利用分配律 $\frac{23}{7}\times(\frac{4}{23}+\frac{a}{69})=\frac{4}{7}+\frac{a}{21}=\frac{12}{21}+\frac{a}{21}=\frac{12+a}{21}$

$\because \frac{12+a}{21}$ 為一個正整數

$\therefore 12+a$ 必為 21 的倍數

$\Rightarrow a$ 值可為 9、30、51、72、93 等

可知 a 被 21 除，所得的餘數必為 $21-12=9$

題型 4 應用題型

甲、乙、丙三人接力完成一件工程。若甲先獨做，他花了 4 天的時間完成全部的 $\frac{2}{3}$；再由乙獨做，乙花了 3 天的時間完成剩下的 $\frac{1}{2}$；最後由丙獨做，丙花了 2 天終於完工。則三個人中，若由甲、丙合作 2 天，再由乙獨做，則乙再 ___9___ 天即可完工。

若甲獨做，則每天可做全部工程的 $\frac{2}{3}\div4=\frac{1}{6}$

若乙獨做，則每天可做全部工程的 $(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}\div3=\frac{1}{18}$

若丙獨做，則每天可做全部工程的 $(1-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2})\div2=\frac{1}{12}$

故所求 $=[1-2(\frac{1}{6}+\frac{1}{12})]\div\frac{1}{18}=\frac{1}{2}\times18=9$ 天

2-4 指數律(1)

重點整理

1.指數型的分數大小比較：

(1)若正負符號相同時，將各數化成同底數或同指數以便於判斷。

(2)❶當底數為正假分數時，次方愈大者其值愈大。

❷當底數為正真分數時，次方愈大者其值反而愈小。

題型 1 指數型的通分

若 $\frac{1}{3^2\times5\times7^3}-\frac{1}{3\times5^2\times7^3}-\frac{1}{3^2\times5^3\times7^2}=\frac{a}{3\times5^3\times7^3}$，則 $a=$ ＿1＿。

由$[3^2\times5\times7^3, 3\times5^2\times7^3, 3^2\times5^3\times7^2]=3^2\times5^3\times7^3$

可將左式通分計算為

$\frac{5^2}{3^2\times5^3\times7^3}-\frac{3\times5}{3^2\times5^3\times7^3}-\frac{7}{3^2\times5^3\times7^3}$

$=\frac{25-15-7}{3^2\times5^3\times7^3}$

$=\frac{3}{3^2\times5^3\times7^3}$

$=\frac{1}{3\times5^3\times7^3}$

故 $a=1$

題型 2 分數與乘方的綜合運算

$\frac{1}{(-3)}-\frac{3}{(-3)^2}+\frac{9}{(-3)^3}-\frac{27}{(-3)^4}+\frac{81}{(-3)^5}-\frac{243}{(-3)^6}$ $=$ ＿-2＿。

原式$=-\frac{1}{3}-\frac{3}{3^2}-\frac{3^2}{3^3}-\frac{3^3}{3^4}-\frac{3^4}{3^5}-\frac{3^5}{3^6}$

$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$

$=(-\frac{1}{3})\times6$

$=-2$

題型 3 指數型的大小比較

試比較 2^{20}、4^{12}、9^{15}、27^{8} 的大小：＿$2^{20}<4^{12}<27^{8}<9^{15}$＿。

$$\begin{cases}2^{20}\\4^{12}=(2^2)^{12}=2^{24}\\9^{15}=(3^2)^{15}=3^{30}\\27^{8}=(3^3)^{8}=3^{24}\end{cases}$$

由上可知 $2^{20}<2^{24}<3^{24}<3^{30}$

故 $2^{20}<4^{12}<27^{8}<9^{15}$

題型 4 指數型的分數大小比較

試比較$(-\frac{8}{9})^{57}$、$(-\frac{8}{9})^{58}$、$(-\frac{8}{9})^{59}$、$(-\frac{8}{9})^{60}$四數的大小：＿$(-\frac{8}{9})^{58}>(-\frac{8}{9})^{60}>(-\frac{8}{9})^{59}>(-\frac{8}{9})^{57}$＿。

(1)由於負數的偶次方得正，奇次方得負

故$(-\frac{8}{9})^{57}<0$，$(-\frac{8}{9})^{58}>0$，$(-\frac{8}{9})^{59}<0$，$(-\frac{8}{9})^{60}>0$

(2)當底數為正真分數時，次方愈大者其值愈小

故$(\frac{8}{9})^{58}>(\frac{8}{9})^{60}\Rightarrow(-\frac{8}{9})^{58}>(-\frac{8}{9})^{60}$

(3)再由$(\frac{8}{9})^{57}>(\frac{8}{9})^{59}\Rightarrow -(\frac{8}{9})^{57}<-(\frac{8}{9})^{59}$

$\Rightarrow(-\frac{8}{9})^{57}<(-\frac{8}{9})^{59}$

(4)由上可知$(-\frac{8}{9})^{58}>(-\frac{8}{9})^{60}>(-\frac{8}{9})^{59}>(-\frac{8}{9})^{57}$

2-4 指數律(2)

重點整理

1. 以下為常見的指數律：

(1)$a^m \times a^n = a^{m+n}$。

(2)$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$。

(3)$(a^m)^n = a^{m \times n}$。

(4)$(a \times b)^n = a^n \times b^n$。

(5)$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$。

(6)$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$。(註：0^0 為無意義)

2.分數進階指數律：(1)$(\frac{a}{b})^m \times (\frac{a}{b})^n = (\frac{a}{b})^{m+n} = \frac{a^{m+n}}{b^{m+n}}$。

(2)$(\frac{a}{b})^m \div (\frac{a}{b})^n = (\frac{a}{b})^{m-n} = \frac{a^{m-n}}{b^{m-n}}$。

題型 1　10 的次方

求 $100^2 \times 1000^3 \times 10000^4 \times 100000^5$ 的乘積中，末尾共有 ___54___ 個 0。

原式 $= (10^2)^2 \times (10^3)^3 \times (10^4)^4 \times (10^5)^5$

$= 10^4 \times 10^9 \times 10^{16} \times 10^{25}$

$= 10^{4+9+16+25}$

$= 10^{54}$

故其末尾有 54 個 0

題型 2　指數律的活用

若 $(4^{22} - 2^{40}) \div 3 = m \times 4^{20}$，則 $m =$ ___5___。

左式 $= [4^{22} - (2^2)^{20}] \div 3$

$= (4^{22} - 4^{20}) \div 3$

$= (4^2 \times 4^{20} - 4^{20}) \div 3$

$= (15 \times 4^{20}) \div 3$

$= 5 \times 4^{20}$

故 $m = 5$

題型 3　分數加減法與指數律

已知 $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^8 + 2^9 = 1023$，且 $2^{10} = 1024$，則 $\frac{4}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{4}{2^{11}} + \frac{4}{2^{12}}$

$=$ ___$\frac{2047}{1024}$___。

所求 $= 4 \times (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}})$

$= 4 \times (\frac{2^{10}}{2^{12}} + \frac{2^9}{2^{12}} + \frac{2^8}{2^{12}} + \cdots + \frac{2^1}{2^{12}} + \frac{2^0}{2^{12}})$

$= 4 \times (\frac{2^{10} + 2^9 + 2^8 + \cdots + 2^1 + 2^0}{2^{12}})$

$= 2^2 \times (\frac{1024 + 1023}{2^{12}})$

$= \frac{2047}{2^{10}}$

$= \frac{2047}{1024}$

題型 4　分數指數律活用

(1) $(\frac{3}{7})^5 \times (\frac{3}{7})^2 \div (\frac{3}{7})^3 = \frac{3^a}{7^b}$，則 $a =$ ___4___，$b =$ ___4___。

(2) $(\frac{3}{7})^{10} \div (3^4 \times 7^4)^2 = \frac{3^a}{7^b}$，則 $a =$ ___2___，$b =$ ___18___。

(1)原式 $= (\frac{3}{7})^{5+2-3} = (\frac{3}{7})^4 = \frac{3^4}{7^4}$

$\therefore a = 4$，$b = 4$

(2)原式 $= \frac{3^{10}}{7^{10}} \div (3^8 \times 7^8) = \frac{3^{10}}{7^{10}} \times \frac{1}{3^8 \times 7^8} = \frac{3^2}{7^{18}}$

$\therefore a = 2$，$b = 18$

3-1 代數式的化簡(1)

重點整理

1.文字符號可以代表數，習慣上我們用英文字母 a、b、c、⋯、x、y、z 等文字來代表數。

2.乘法的簡記：常將數字和英文字母間的乘號「×」改寫成「‧」或省略不寫。而簡記時，數字應寫在英文字母的前面。

3.進行除法運算時，除以一個不為 0 的數就等於乘以這個數的倒數。

4.一個代數式中的文字符號，若以數字代入，則可算出其對應的值。

5.以下各式其寫法不同，意義也均不同：

(1)$x^2=x\times x$。

(2)$(-x)^2=(-x)\times(-x)=x^2$。

(3)$-x^2=-(x\times x)$。

(4)$-(-x)^2=-(-x)\times(-x)=-x^2$。

(5)$-(-x^2)=-[-(x\times x)]=x^2$。

6.以文字符號列式：下表為常見的文字敘述與相對應的運算符號。

文字敘述	運算符號
比、為、是、恰好、等於	＝
大、長、多、重、貴	＋
小、短、少、輕、便宜	－
⋯⋯倍	×
⋯⋯等分	÷

題型 1 乘除混合簡記

化簡 $1\div a\div b\div(c\div d)\times e=$ $\underline{\dfrac{de}{abc}}$。

原式$=1\div a\div b\div(\dfrac{c}{d})\times e$

$=1\times\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{b}\times\dfrac{d}{c}\times e$

$=\dfrac{de}{abc}$

題型 2 指數型的簡記

化簡$(-x^2)\times(-x)^3\times(-x^5)\times(-x)^6=$ $\underline{-x^{16}}$。

原式$=(-x^2)\cdot(-x^3)\cdot(-x^5)\cdot(x^6)$

$=-x^2\cdot x^3\cdot x^5\cdot x^6$

$=-x^{2+3+5+6}$

$=-x^{16}$

題型 3 以符號列式的逆推題型

若哥哥的錢是弟弟的 3 倍還少 20 元，設哥哥有 x 元，則弟弟有 $\underline{\dfrac{x+20}{3}}$ 元。

若哥哥多 20 元，此時恰為弟弟的 3 倍

故 $x+20$ 為弟弟的 3 倍

可得弟弟為$\dfrac{x+20}{3}$元

題型 4 平面圖形的應用

有一個正方形的周長和另一個正六邊形的周長相等，若這個正方形的邊長為 a，則此正六邊的邊長為 $\underline{\dfrac{2}{3}a}$。

該正方形的周長$=4a$

由題意可知正六邊形的周長也為 $4a$

故其邊長$=\dfrac{4a}{6}=\dfrac{2}{3}a$

3-1 代數式的化簡(2)

重點整理

1.式子在化簡時，可利用(1)交換律、(2)結合律、(3)分配律。

2.應用題型(一)：

(1)售價＝定價×折扣。

(2)定價＝售價÷折扣。

(3)平均數＝$\dfrac{\text{總數量(值)}}{\text{個數(次數)}}$。

(4)總數量(值)＝個數(次數)×平均數。

3.應用題型(二)：

(1)若百位數字為 a，十位數字為 b，個位數字為 c，則此三位數為 $100a+10b+c$。

(2)速率＝$\dfrac{\text{距離}}{\text{時間}}$；時間＝$\dfrac{\text{距離}}{\text{速率}}$；距離＝速率×時間。

(3)重量百分率濃度＝$\dfrac{\text{溶質重}}{\text{溶液重}}\times 100\%$；溶質重＝溶液重×重量百分率濃度。

(4)若一工程 x 天可完工，則平均每天可做工程的 $\dfrac{1}{x}$。

題型 1 數字類題型

已知甲＋乙＋丙＝13，若乙數為 a，甲數比乙數的 3 倍多 1，則甲數的一半比丙數的 $\dfrac{1}{4}$ 倍多出 $\underline{\dfrac{5a-5}{2}}$ (以 a 表示)。

甲＝$3a+1$

丙＝13－甲－乙＝$13-(3a+1)-a=12-4a$

所求＝$\dfrac{3a+1}{2}-\dfrac{12-4a}{4}=\dfrac{6a+2}{4}-\dfrac{12-4a}{4}$

$=\dfrac{6a+2-12+4a}{4}=\dfrac{5a-5}{2}$

題型 2 折扣類題型

讚美今年的年薪為 x 元，今年較去年多 5%；去年較前年多 10%，則前年的年薪為 $\underline{\dfrac{200}{231}x}$ 元。

去年年薪為 $x\div\dfrac{105}{100}=x\cdot\dfrac{100}{105}=\dfrac{20}{21}x$ 元

前年年薪為 $\dfrac{20}{21}x\div\dfrac{110}{100}=\dfrac{20}{21}x\cdot\dfrac{100}{110}=\dfrac{200}{231}x$ 元

題型 3 價格類題型

已知一顆西瓜的價格比 8 顆梨子還多 2 元；一顆蘋果的價格比 2 顆梨子還少 2 元，則一顆西瓜若降價 $\underline{\quad 10 \quad}$ 元後，其價格恰是一顆蘋果的 4 倍。

設每顆梨子 x 元，每顆西瓜 $(8x+2)$元

每顆蘋果 $(2x-2)$元

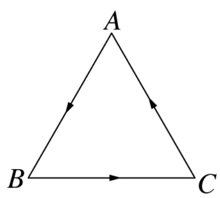
若每顆西瓜的價格恰為每顆蘋果的 4 倍

則此時每顆西瓜應為 $4(2x-2)=8x-8$ 元

亦即須從原價 $8x+2$ 元降價 10 元，才會變成 $8x-8$ 元

題型 4 速率類題型

如右圖，祝伶繞著一個正△ABC 的水池行走，若 $A\to B$ 的速率為 3 公里／小時；$B\to C$ 的速率為 4 公里／小時；$C\to A$ 的速率為 6 公里／小時，則她繞△ABC 一圈的平均速率為 $\underline{\quad 4 \quad}$ 公里／小時。



設 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=x$ 公里

則平均速率＝$\dfrac{\text{總距離}}{\text{總時間}}$

$=\dfrac{x+x+x}{\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}}=\dfrac{3x}{\frac{9}{12}x}=\dfrac{3}{\frac{3}{4}}=4$ 公里／小時

3-2 一元一次方程式(1)

重點整理

1.一元一次方程式：一個等式經移項化簡後，只含有一種未知數(例如 x)，且其未知數的最高次數只有一次時，則此等式稱為「一元一次方程式」。

2.方程式的解(或根)：將方程式中的未知數以某數代入，若使方程式的等號成立，則此數即稱為此方程式的解(或根)。

3.等量公理：將等式兩側同時加、減、乘以一數或除以一個不為 0 的數，等式仍然成立，此即為等量公理。

4.移項法則：將一個數(或式子)從等號的一側移到另一側時，「＋」要變成「－」；「－」要變成「＋」；「×」要變成「÷」；「÷」要變成「×」。

題型 1　解一元一次方程式

解 $\frac{3}{5}\{\frac{9}{10}[\frac{6}{7}(\frac{2}{3}x-5)-10]-8\}-5=1$，得 $x=$ <u>60</u>。

原式 $\Rightarrow \frac{3}{5}\{\frac{9}{10}[\frac{6}{7}(\frac{2}{3}x-5)-10]-8\}=6$

$\Rightarrow \frac{9}{10}[\frac{6}{7}(\frac{2}{3}x-5)-10]-8=10$

$\Rightarrow \frac{9}{10}[\frac{6}{7}(\frac{2}{3}x-5)-10]=18$

$\Rightarrow \frac{6}{7}(\frac{2}{3}x-5)-10=20$

$\Rightarrow \frac{6}{7}(\frac{2}{3}x-5)=30$

$\Rightarrow \frac{2}{3}x-5=35$

$\Rightarrow \frac{2}{3}x=40$

$\Rightarrow x=60$

題型 2　移項化簡的技巧

若 $\frac{a}{3}=1-\frac{2b+5c}{6}$，試利用移項化簡的技巧，將 c 用 a、b 的一次式來表示為 $c=$ <u>$\frac{-2a-2b+6}{5}$</u>。

將左右式同乘以 6 得 $2a=6-(2b+5c)$

$\Rightarrow 2a=6-2b-5c$

$\Rightarrow 5c=6-2b-2a$

$\Rightarrow c=\frac{-2a-2b+6}{5}$

題型 3　已知解，求係數題型

已知 $x=5$ 為方程式 $\frac{3x-a-1}{4}-\frac{1+2ax}{3}=-2a$ 的解，求 $a=$ <u>2</u>。

將 $x=5$ 代入原式得 $\frac{14-a}{4}-\frac{1+10a}{3}=-2a$

左右同乘以 12 得 $3(14-a)-4(1+10a)=-24a$

$\Rightarrow 42-3a-4-40a=-24a$

$\Rightarrow 38=19a$

$\Rightarrow a=2$

題型 4　求值題型

已知 $29(99x-\frac{1}{58})=-\frac{91}{2}$，則 $319x=$ <u>-5</u>。

由 $29(99x-\frac{1}{58})=-\frac{91}{2}$

$\Rightarrow 29\cdot 99x-\frac{1}{2}=-\frac{91}{2}$

$\Rightarrow 319\cdot 9x=-45$

$\Rightarrow 319x=-\frac{45}{9}=-5$

3-2 一元一次方程式(2)

重點整理

1.移項法則為等量公理的延伸作法，使用上較等量公理更簡潔、快速。

2.無論是現在的一元一次方程式或者是未來的各種方程式，都應養成求解後，代回驗算的好習慣。

題型 1 移項化簡的特殊題型

解 $\frac{2017}{2018}x-\frac{2018}{2017}=\frac{2018}{2017}x-\frac{2017}{2018}$，

得 $x=$ ___-1___。

移項得 $\frac{2017}{2018}x-\frac{2018}{2017}x=\frac{2018}{2017}-\frac{2017}{2018}$

$\Rightarrow (\frac{2017}{2018}-\frac{2018}{2017})x=-(\frac{2017}{2018}-\frac{2018}{2017})$

$\Rightarrow x=-1$

題型 2 kx＝0(k≠0)的特殊題型

解 $\frac{2017}{2018}x-\frac{2018}{2017}=\frac{2016}{2017}x-\frac{2015}{2016}x-\frac{2018}{2017}$，

得 $x=$ ___0___。

左右同加 $\frac{2018}{2017}$，得 $\frac{2017}{2018}x=\frac{2016}{2017}x-\frac{2015}{2016}x$

$\Rightarrow \frac{2017}{2018}x-\frac{2016}{2017}x+\frac{2015}{2016}x=0$

$\Rightarrow (\frac{2017}{2018}-\frac{2016}{2017}+\frac{2015}{2016})x=0$

$\Rightarrow x=0$

題型 3 指數律的活用題型

若 $27^{2x-4}=81^{x+6}=9^k$，得 $k=$ ___48___。

由 $27^{2x-4}=81^{x+6}$

$\Rightarrow 3^{3(2x-4)}=3^{4(x+6)}$

$\Rightarrow 3(2x-4)=4(x+6)$

解得 $x=18$

帶回原式得 $27^{32}=81^{24}=9^k$

再由 $81^{24}=9^k$

$\Rightarrow (9^2)^{24}=9^k$

$\Rightarrow 9^{48}=9^k$

解得 $k=48$

題型 4 方程式及其解的活用題型

設 $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=k$ (k 為常數)的解為 $x=m$，

則 $\frac{x}{10}-\frac{x}{15}=k$ 的解為 ___$5m$___。(以 m 表示)

代 $x=m$ 到 $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=k$ 得 $\frac{m}{2}-\frac{m}{3}=k$

$\Rightarrow m=6k$

由 $\frac{x}{10}-\frac{x}{15}=k \Rightarrow x=30k$

故其解為 $30k=5(6k)=5m$

3-3 應用問題(1)

重點整理

1.應用問題的解題步驟如下：

[步驟一]設未知數：由題意選定適當的數值假設為未知數 x。

[步驟二]列方程式：由題意列出一個一元一次方程式。

[步驟三]解方程式：解方程式以求出未知數 x。

[步驟四]代回驗算並寫答：檢驗所求出的解是否滿足題意。

題型 1 比例類題型

經濟很不景氣，某公司原裁員若干人，若少裁 3 人，則該公司共裁員 $\frac{1}{3}$；若多裁 6 人，則該公司共裁員 $\frac{1}{2}$，則該公司原有員工共 ___54___ 人。

設該公司原裁員 x 人

以裁員數來逆推全公司原有員工數

得$(x-3)\div\frac{1}{3}=(x+6)\div\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 3(x-3)=2(x+6)$

$\Rightarrow x=21$

故該公司裁員 21 人

可得原有員工$(21-3)\div\frac{1}{3}=54$ 人

或$(21+6)\div\frac{1}{2}=54$ 人

題型 2 速率類題型

俊哲以等速走一段路，若每小時快 2 公里，則所需的時間為原本的 $\frac{2}{3}$，則他原來的速率為 ___4___ 公里／小時。

$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{l}$

設路長為 l 公里，他原來的速率為 x 公里／小時

則由題意可列式為$\frac{l}{x+2}=\frac{2}{3}\times\frac{l}{x}$

$\Rightarrow\frac{1}{x+2}=\frac{2}{3x}$

$\Rightarrow 2(x+2)=3x$

$\Rightarrow x=4$

故原來的速率為 4 公里／小時

題型 3 折扣類題型

某雙球鞋若店家以定價六折賣出，會賠本 200 元；若以定價九折賣出，會賺 400 元，今店家以 ___七___ 折賣出時，將會不賺不賠。

設定價為 x 元

則以成本列式為 $0.6x+200=0.9x-400$

解得 $x=2000$，代回得 $0.6\times2000+200=1400$

故此定價為 2000 元，成本為 1400 元

由於$\frac{1400}{2000}=0.7$

故若以七折賣出時，將會不賺不賠

題型 4 其他題型

有兩枝等高但不等粗的香，第一枝香 5 小時可燒完，第二枝香 3 小時可燒完。若同時點燃且以一定的速率燃燒，則在燃燒 ___2.5___ 個小時後，第一枝香的高度是第二枝香高度的 3 倍。

設兩枝香的高度均為 1 個單位長

第一枝香平均每小時燃燒掉 $\frac{1}{5}$ 個單位長的高度

第二枝香平均每小時燃燒掉 $\frac{1}{3}$ 個單位長的高度

則 $1-\frac{x}{5}=3(1-\frac{x}{3})$

$\Rightarrow 1-\frac{x}{5}=3-x\Rightarrow\frac{4}{5}x=2\Rightarrow x=\frac{5}{2}$

3-3 應用問題(2)

重點整理

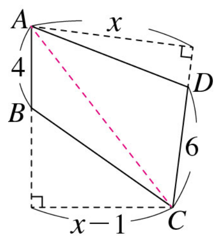
1.解應用問題時，適當假設未知數非常重要，假設得好將有利進行列式。

2.建立等式時要關注於等號建立在哪裡？比方說人數、個數、金額或其他等等。

3.若時間允許，驗算工作不可少，以提升答對的機率。

題型 1 幾何類題型

如右圖，若四邊形 $ABCD$ 的面積為 38，則 $x=$ ____8____。



連 $\overline{AC}$，以 $ABCD$ 的面積來列式

得 $\frac{1}{2}\times4\times(x-1)+\frac{1}{2}\times6\times x=38$

$\Rightarrow 2(x-1)+3x=38$

$\Rightarrow 5x-2=38$

$\Rightarrow 5x=40$

$\Rightarrow x=8$

題型 2 金錢類題型

智嫣用去所有錢的 $\frac{1}{3}$ 買一本書，再用去剩餘錢的 $\frac{1}{4}$ 買一張彩券，再用去剩餘錢的 $\frac{1}{5}$ 買一支筆，最後剩下 240 元，則她原本有 ____600____ 元。

設她原有 x 元

則 $\frac{4}{5}[\frac{3}{4}(\frac{2}{3}x)]=240$

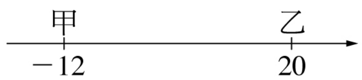
$\Rightarrow \frac{2}{5}x=240$

$\Rightarrow x=600$

故她原本有 600 元

題型 3 速率類題型

如下圖，甲、乙兩人分別從數線上 −12 與 20 的位置同時向右出發，若甲的速率是乙的 5 倍，則甲、乙將在數線上標示 ____28____ 的位置相遇。



由題意可設每單位時間乙走 x 個單位長

甲走 $5x$ 個單位長

且一開始兩人相距 $20-(-12)=32$ 個單位長

則可列式為 $5x=32+x \Rightarrow x=8$

故最後兩人在 $20+8=28$ 的位置相遇

題型 4 年齡類題型

已知 2 年前爸爸的年齡是兒子年齡的 6 倍，2 年後爸爸的年齡是兒子年齡的 4 倍，則 ____7____ 年後，爸爸的年齡會是兒子年齡的 3 倍。

(1) 設 2 年前兒子 x 歲、爸爸 $6x$ 歲

今年兒子 $(x+2)$ 歲、爸爸 $(6x+2)$ 歲

2 年後兒子 $(x+4)$ 歲、爸爸 $(6x+4)$ 歲

由題意可列式為 $6x+4=4(x+4) \Rightarrow x=6$

代回得兒子今年 8 歲、爸爸今年 38 歲

(2) 設 y 年後，爸爸的年齡是兒子的 3 倍

可列式為 $38+y=2(8+y)$

解得 $y=7$