

1-2 解二元一次 聯立方程式

主題1 二元一次聯立方程式

主題2 代入消去法

主題3 加減消去法

重點整理

自我評量

列二元一次聯立方程式

延續第 6 頁動物園旅遊的情境，已知全票每張 x 元、
優待票每張 y 元，



：買 5 張全票和 2 張優待票，共花了 360 元，
可列出方程式： $5x + 2y = 360$ ；



：買 3 張全票和 1 張優待票，共花了 210 元，
可列出方程式： $3x + y = 210$ 。



當用到兩個二元一次方程式表達題目中的數量關係時，可以把這兩個二元一次方程式並列，

寫成如右的形式： $\begin{cases} 5x + 2y = 360 \\ 3x + y = 210 \end{cases}$ 。像這樣並列在一起的二元一次方程式，就稱為二元一次聯立方程式或二元一次方程組。



二元一次聯立方程式的解

像上面兩個二元一次方程式 $5x + 2y = 360$ 和 $3x + y = 210$ ，雖然各自有解，但是當聯立在一起時，能同時讓兩個方程式等號都成立的 x 、 y 值，就是這兩個方程式的一組**共同解**，這時稱 x 、 y 值為此聯立方程式的解。

例如： $x = 60$ 、 $y = 30$ 是 $5x + 2y = 360$ 和 $3x + y = 210$ 的共同解，也就是說 $x = 60$ 、 $y = 30$ 這一組數是二元一次聯立

方程式 $\begin{cases} 5x + 2y = 360 \\ 3x + y = 210 \end{cases}$ 的解，這組解亦可記為 $\begin{cases} x = 60 \\ y = 30 \end{cases}$ 。



Key point

二元一次聯立方程式的解

能同時讓二元一次聯立方程式裡，兩個方程式等號都成立的 x 、 y 值，就是此二元一次聯立方程式的解。



例 1 判斷二元一次聯立方程式的解

搭配課本p22

下列各組數中，哪些是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ 的解？

(1) $x=-1$ 、 $y=2$ (2) $x=3$ 、 $y=3$ (3) $x=2$ 、 $y=1$

解

為了方便觀察，我們可以列表來表示將 x 、 y 代入後等號是否成立：

| | x | y | $x+3y=5$ | $2x-y=3$ |
|-----|-----|-----|----------|----------|
| (1) | -1 | 2 | 是 | 否 |
| (2) | 3 | 3 | 否 | 是 |
| (3) | 2 | 1 | 是 | 是 |



例 1 判斷二元一次聯立方程式的解

搭配課本p22

下列各組數中，哪些是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ 的解？

(1) $x=-1$ 、 $y=2$ (2) $x=3$ 、 $y=3$ (3) $x=2$ 、 $y=1$



解

從表中可以看出 $x=2$ 、 $y=1$ 這組數是兩個方程式的共同解，所以 (3) $x=2$ 、 $y=1$ 這組數是二元一次聯立方程式

$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ 的解。



下列各組數中，哪些是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ 的解？

(1) $x=2$ 、 $y=1$ (2) $x=2$ 、 $y=-1$ (3) $x=1$ 、 $y=-2$

解

| | x | y | $2x + 3y = 1$ | $x - y = 3$ |
|-----|-----|-----|---------------|-------------|
| (1) | 2 | 1 | 否 | 否 |
| (2) | 2 | -1 | 是 | 是 |
| (3) | 1 | -2 | 否 | 是 |



下列各組數中，哪些是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ 的解？

(1) $x=2$ 、 $y=1$ (2) $x=2$ 、 $y=-1$ (3) $x=1$ 、 $y=-2$

解 所以 (2) $x=2$ 、 $y=-1$ 這組數是

二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ 的解。



$$\begin{cases} x=2y \\ x+y=27 \end{cases}$$

$$x=2, y=1 \Rightarrow 2+1 \neq 27$$

$$x=4, y=2 \Rightarrow 4+2 \neq 27$$

$$\vdots$$

哇！數字一組一組代入去試，到底要試到什麼時候？



$x=?$
 $y=?$



如果沒有一組特定的 x 、 y 值來代入，還有其他的方法可以求解嗎？



解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x=2y \\ x+y=27 \end{cases}$ 。

解

為了方便說明，把原方程式標上序號，得到

$$\begin{cases} x=2y & \dots\dots ① \\ x+y=27 & \dots\dots ② \end{cases}$$

第一步：觀察①式得知 $x=2y$ ，
可以將②式中的 x 用 $2y$ 取代，

$$\begin{aligned} \text{得 } 2y + y &= 27 \\ 3y &= 27 \\ y &= 9 \end{aligned}$$

第二步：將 $y=9$ 代入①式，得 $x=2 \times 9 = 18$ 。

Hint

$$\begin{cases} x=2y & \dots\dots ① \\ x+y=27 & \dots\dots ② \end{cases}$$

(Note: A red arrow points from the 'x' in equation ② to the '2y' in equation ①.)



解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x=2y \\ x+y=27 \end{cases}$ 。

驗算

用 $x=18$ 、 $y=9$ 代入兩個方程式，

即 $18=2 \times 9$ 且 $18+9=27$ ，

等號都成立，

所以 $\begin{cases} x=18 \\ y=9 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x=2y \\ x+y=27 \end{cases}$ 的解。



驗算的過程在解聯立方程式時，可以用來檢驗計算是否正確，但在實際解題時，並不一定要將驗算過程寫出。





動 動 腦

在例 2 的求解過程中，若改成將 $y=9$ 代入②式 $x+y=27$ ，所求得的 x 值也會相同嗎？

會。

$$x+9=27, x=18$$

因為聯立方程式的解是共同解，所以不論代入哪個方程式，結果都會一樣



當我們把二元一次聯立方程式的其中一個方程式，變成只有一個未知數的一元一次方程式，就可以用等量公理或移項法則解此方程式，再將所得的解，代入方程式中求另一個未知數的解。而求出聯立方程式的解的過程，就叫做**解聯立方程式**。

而像例 2 這種利用代入另一個方程式，消去聯立方程式其中一個未知數的方法，稱為**代入消去法**。

學習時光機

等量公理 等號兩邊同「 $+$ 、 $-$ 、 \times 、 \div 」一個數，等號維持相等。

移項法則 某項移到等號另一邊，「 $+$ 變 $-$ 、 $-$ 變 $+$ 、 \times 變 \div 、 \div 變 \times 」。





解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} x=4y & \dots\dots ① \\ x+y=10 & \dots\dots ② \end{cases}$$

解

將①式代入②式，得 $4y + y = 10$

$$5y = 10$$

$$y = 2$$

將 $y=2$ 代入①式，得 $x = 4 \times 2 = 8$

所以 $\begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(2) \begin{cases} x + 3y = 10 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y = -2x & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解

將②式代入①式，得 $x + 3(-2x) = 10$
 $-5x = 10$
 $x = -2$

將 $x = -2$ 代入②式
得 $y = -2 \times (-2) = 4$

所以 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



例 3 代入消去法解二元一次聯立方程式

搭配課本p25

解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} y=3-9x \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 3x+2y=6\cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$ 。

解 可將②式中的 y 用 $(3-9x)$ 取代，

$$\text{得 } 3x + 2(3 - 9x) = 6$$

$$3x + 6 - 18x = 6$$

$$-15x = 0$$

$$x = 0$$

將 $x=0$ 代入①式，得 $y=3-9\times 0=3$ ，

所以 $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。

Hint

$$\begin{cases} y=3-9x \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 3x+2y=6\cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$





解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 2x + 5y = 36 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x = 3y - 4 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解

將②式代入①式

$$\text{得 } 2(3y - 4) + 5y = 36$$

$$6y - 8 + 5y = 36$$

$$11y = 44$$

$$y = 4$$

將 $y = 4$ 代入②式

$$\text{得 } x = 3 \times 4 - 4 = 8$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(2) \begin{cases} y = -2x + 1 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 4x - 3y = 17 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解

將①式代入②式

$$\text{得 } 4x - 3(-2x + 1) = 17$$

$$4x + 6x - 3 = 17$$

$$10x = 20$$

$$x = 2$$

將 $x = 2$ 代入①式

$$\text{得 } y = -2 \times 2 + 1 = -3$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解



解二元一次聯立方程式時，一般我們希望能像例 2 中用 $x=2y$ ，或例 3 中用 $y=3-9x$ 直接代入另一個方程式而得到一元一次方程式來求解；但若不是這樣，此時可以將其中一個方程式先整理成 $x=cy+d$ 或 $y=ax+b$ 的樣子，再以代入消去法求聯立方程式的解。接下來說明這種求解的過程。



例 4 代入消去法解二元一次聯立方程式

搭配課本p26

解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + 4y = -1 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 5x - y = 16 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ 。

解

先將①式整理成等號左邊只有 x ，即 $x = -1 - 4y \cdots \cdots \textcircled{3}$

將③式代入②式，

$$\text{得 } 5(-1 - 4y) - y = 16$$

$$-5 - 20y - y = 16$$

$$-21y = 21$$

$$y = -1$$

將 $y = -1$ 代入③式，得 $x = -1 - 4 \times (-1) = 3$ ，

所以 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。

Hint

此題也可以由②式得 $y = 5x - 16$ 代入①式。



解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + y = 11 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

解 整理②式得 $y = 11 - 3x \cdots \cdots \textcircled{3}$

將③式代入①式，得 $2x - 3(11 - 3x) = 0$

$$2x - 33 + 9x = 0$$

$$11x = 33$$

$$x = 3$$

將 $x = 3$ 代入③式，得 $y = 11 - 3 \times 3 = 2$

所以 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解







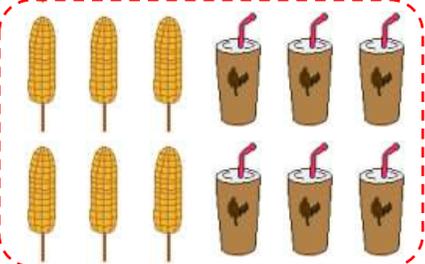
你知道除了用代入消去法解二元一次聯立方程式外，還有其他方法嗎？

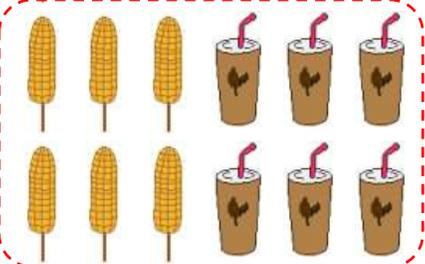
仔細觀察第 27 頁漫畫的內容，可以發現：小妍比小翊多買了 2 杯古早味紅茶，且小妍多花 40 元。利用這個線索可以算出 1 杯古早味紅茶的價錢，並進一步求出 1 串烤玉米的價錢。

我們以圖示的方式呈現解題過程，並與解二元一次聯立方程式做對照：



 : 烤玉米  : 古早味紅茶

 = 100 100 (10)(10)(10)(10)(10)

 = 100 100 (10)

上下兩圖相比

代入

 = 40
 = 20

又  = 210
 = 150
 = 50

所以 1 串烤玉米 50 元，1 杯古早味紅茶 20 元。



假設 1 串烤玉米 x 元

1 杯古早味紅茶 y 元

$$\begin{cases} 3x + 5y = 250 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 3y = 210 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①、②兩式相比，即①－②得

$$2y = 40$$

$$y = 20$$

將 $y = 20$ 代入②式，得 $3x + 3 \times 20 = 210$

$$3x = 150$$

$$x = 50$$

可以寫成

$$\begin{array}{r} 3x + 5y = 250 \\ -) 3x + 3y = 210 \\ \hline 2y = 40 \end{array}$$



從上面的解題過程可以發現，將聯立方程式的兩個二元一次方程式相減，剛好消去其中一個未知數，而使原聯立方程式簡化為一元一次方程式。



那麼如何將兩個二元一次方程式相加或相減後，消去一個未知數呢？我們來看下面的問題探索。



1. 在下列□中填入「+」或「-」使直式計算成立。

$$\begin{array}{r} (1) \quad -4x \\ \boxed{+}) \quad 4x \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) \quad 8y \\ \boxed{+}) \quad -8y \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (3) \quad 12x \\ \boxed{-}) \quad 12x \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (4) \quad -5y \\ \boxed{-}) \quad -5y \\ \hline 0 \end{array}$$



2. (1) 在下列□中填入「+」或「-」使直式計算消去 x ，並寫出計算的結果。

$$\begin{array}{r} 2x - 8y \\ \boxed{+} \quad -2x - 8y \\ \hline (-16y) \end{array}$$



2. (2) 在下列□中填入「+」或「-」使直式計算消去 y ，並寫出計算的結果。

$$\begin{array}{r} 2x - 8y \\ \square) \quad -2x - 8y \\ \hline \quad (\quad 4x \quad) \end{array}$$



由問題探索可知，

若同類項的係數互為相反數時，則可用加法來消去此未知數；
若同類項的係數相同時，則可用減法來消去此未知數。

接下來我們來看下面例題。



例 5 加減消去法解二元一次聯立方程式

搭配課本p30

解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 2x - 5y = 11 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$ 。

解 觀察聯立方程式，想消去 y ，

$5y$ 與 $-5y$ 相加，消去 y

$$\begin{array}{r} 2x + 5y = 1 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ +) 2x - 5y = 11 \cdots\cdots\textcircled{2} \\ \hline 4x \quad = 12 \\ x \quad = 3 \end{array}$$

Hint

也可以利用
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 消去 x 。



解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 2x - 5y = 11 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$ 。

解 將 $x=3$ 代入 $\textcircled{1}$ 式，得 $2 \times 3 + 5y = 1$

$$5y = 1 - 6$$

$$5y = -5$$

$$y = -1$$

所以 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。



像例 5 這種將兩個方程式以相加或相減，消去聯立方程式其中一個未知數的方法，稱為**加減消去法**。



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 3x + 2y = 18 & \dots\dots ① \\ -3x + y = -9 & \dots\dots ② \end{cases}$$

解

$$① + ② \text{ 得 } 3y = 9, y = 3$$

將 $y = 3$ 代入①式，得 $x = 4$

所以 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(2) \begin{cases} -5x + 2y = 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x + 2y = 1 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ 得 } 7x = 0, x = 0$$

將 $x = 0$ 代入 $\textcircled{1}$ 式，得 $y = \frac{1}{2}$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



若聯立方程式直接相加或相減無法消去其中一個未知數時，又該用什麼方法呢？我們來看下面的例題。



例 6 加減消去法解二元一次聯立方程式

搭配課本p31

解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 5x - 2y = -4 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 4y = 8 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ 。

解

觀察聯立方程式，想消去 y ，將係數化為相反數，

取 $[2, 4] = 4$

$$\begin{cases} 5x - 2y = -4 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 4y = 8 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

因此將 $\textcircled{1} \times 2$ ，得 $10x - 4y = -8 \cdots \cdots \textcircled{3}$

$-4y$ 與 $4y$ 相加，消去 y

$$\begin{array}{r} 10x - 4y = -8 \cdots \cdots \textcircled{3} \\ +) \quad 3x + 4y = 8 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \hline 13x \quad \quad = 0 \\ \quad \quad x \quad = 0 \end{array}$$

Hint

也可以利用 $\textcircled{2} \times 5 - \textcircled{1} \times 3$ 消去 x 。



例 6 加減消去法解二元一次聯立方程式

搭配課本p31

解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 5x - 2y = -4 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 4y = 8 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ 。

解

將 $x=0$ 代入 $\textcircled{2}$ 式，

得 $3 \times 0 + 4y = 8$ ， $4y = 8$ ， $y = 2$ ，

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 4x + 3y = -5 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x + y = -3 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解

將 $\textcircled{2} \times 2$ 得 $4x + 2y = -6 \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{1} - \textcircled{3}$ 得 $y = 1$

將 $y = 1$ 代入 $\textcircled{2}$ 式，得 $x = -2$

所以 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(2) \begin{cases} 2x - 3y = 8 & \dots\dots ① \\ -5x + 9y = -29 & \dots\dots ② \end{cases}$$

解 將① $\times 3$ 得 $6x - 9y = 24 \dots\dots ③$

② + ③ 得 $x = -5$

將 $x = -5$ 代入①式，得 $y = -6$

所以 $\begin{cases} x = -5 \\ y = -6 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



例 7 加減消去法解二元一次聯立方程式

搭配課本p32

解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 4x + 3y = 7 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$ 。

解

觀察聯立方程式，想消去 x ，將係數化為相同，

取 $[3, 4] = 12$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 8 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 4x + 3y = 7 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

因此將① $\times 4$ ，得 $12x + 20y = 32 \cdots\cdots\textcircled{3}$

將② $\times 3$ ，得 $12x + 9y = 21 \cdots\cdots\textcircled{4}$



例 7 加減消去法解二元一次聯立方程式

搭配課本p32

解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 4x + 3y = 7 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$ 。

解

12x 與 12x 相減，消去 x

$$\begin{array}{r} 12x + 20y = 32 \cdots\cdots\textcircled{3} \\ -) 12x + 9y = 21 \cdots\cdots\textcircled{4} \\ \hline 11y = 11 \\ y = 1 \end{array}$$

Hint

也可以利用
①×3 - ②×5 消去 y。

將 $y=1$ 代入①式，得 $3x + 5 \times 1 = 8$ ， $3x = 3$ ， $x = 1$ ，

所以 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。

解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 3x + 4y = 3 & \dots\dots ① \\ 2x + 5y = -5 & \dots\dots ② \end{cases}$$

想消去 x ，將① $\times 2$ 、② $\times 3$

得 $\begin{cases} 6x + 8y = 6 & \dots\dots ③ \\ 6x + 15y = -15 & \dots\dots ④ \end{cases}$

③ $-$ ④得 $-7y = 21$ ， $y = -3$

將 $y = -3$ 代入②式，得 $x = 5$

所以 $\begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(2) \begin{cases} 5x - 6y = -4 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 4y = 9 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解

想消去 y ，將 $\textcircled{1} \times 2$ 、 $\textcircled{2} \times 3$

$$\text{得} \begin{cases} 10x - 12y = -8 & \cdots \cdots \textcircled{3} \\ 9x + 12y = 27 & \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$\textcircled{3} + \textcircled{4}$ 得 $19x = 19$ ， $x = 1$

將 $x = 1$ 代入 $\textcircled{2}$ 式，得 $y = \frac{3}{2}$

所以 $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



例 8 加減消去法解二元一次聯立方程式

搭配課本p33

解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x = -1 + 2x - 2y \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 3x - 2y - 13 = 0 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$ 。

解 整理①、②兩個原方程式，

可得 $\begin{cases} x + 2y = -1 \cdots\cdots\textcircled{3} \\ 3x - 2y = 13 \cdots\cdots\textcircled{4} \end{cases}$

③ + ④ 得 $4x = 12$

$$x = 3$$



例 8 加減消去法解二元一次聯立方程式

搭配課本p33

解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x = -1 + 2x - 2y \cdots\cdots \textcircled{1} \\ 3x - 2y - 13 = 0 \cdots\cdots \textcircled{2} \end{cases}$ 。

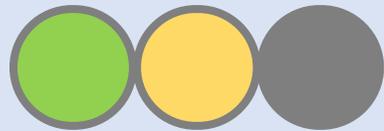
解 將 $x=3$ 代入 $\textcircled{3}$ 式，得 $3 + 2y = -1$

$$2y = -4$$

$$y = -2$$

所以 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。





$$\text{解二元一次聯立方程式} \begin{cases} 2x - 2 = 3y - 3x & \dots\dots\dots ① \\ 3x + 2y - 22 = 2x - y & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

解 整理①、②兩個原方程式

$$\text{可得} \begin{cases} 5x - 3y = 2 & \dots\dots\dots ③ \\ x + 3y = 22 & \dots\dots\dots ④ \end{cases}$$

$$③ + ④ \text{得 } 6x = 24, x = 4$$

將 $x = 4$ 代入④式，得 $y = 6$

所以 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



$$\text{解二元一次聯立方程式} \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \frac{3x}{2} + y = 3 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}。$$

解 先將式子中的分數化為整數，

$$\text{將} \textcircled{1} \times 6、\textcircled{2} \times 2，\text{得} \begin{cases} 3x - 2y = 18 \cdots \cdots \textcircled{3} \\ 3x + 2y = 6 \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\text{再將} \textcircled{3} - \textcircled{4} \text{得} -4y = 12 \\ y = -3$$



Hint

也可以利用
 $\textcircled{1} \times 3 + \textcircled{2}$
消去 y 。



$$\text{解二元一次聯立方程式} \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \frac{3x}{2} + y = 3 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}。$$

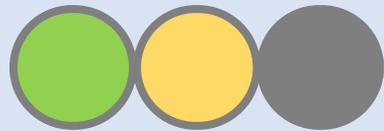
解 將 $y = -3$ 代入④式，得 $3x + 2 \times (-3) = 6$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

所以 $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。





解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{17}{6} & \dots\dots ① \\ 2x + 3y = 13 & \dots\dots ② \end{cases}$$

解

將① $\times 6$ 得 $4x + 3y = 17 \dots\dots ③$

③ $-$ ②得 $2x = 4$ ， $x = 2$

將 $x = 2$ 代入②式，得 $y = 3$

所以 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(2) \begin{cases} 0.3x - 0.2y = 2.5 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 5x + 2y = 15 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解 將 $\textcircled{1} \times 10$ 得 $3x - 2y = 25 \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2} + \textcircled{3}$ 得 $8x = 40$, $x = 5$

將 $x = 5$ 代入 $\textcircled{2}$ 式，得 $y = -5$

所以 $\begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



1 二元一次聯立方程式

將兩個二元一次方程式並列，來表達題目中的數量關係，這兩個並列的二元一次方程式，就稱為二元一次聯立方程式。

例 某次出遊到動物園，

小翊買了 5 張全票和 2 張優待票，共花了 360 元；

小妍買了 3 張全票和 1 張優待票，共花了 210 元。

設全票每張 x 元、優待票每張 y 元，

則依題意可列出二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 5x + 2y = 360 \\ 3x + y = 210 \end{cases}$ 。



2 二元一次聯立方程式的解

能同時讓二元一次聯立方程式裡，兩個方程式等號都成立的 x 、 y 值，就是此二元一次聯立方程式的解。

例 承上例，

因為 $x=60$ 、 $y=30$ 能讓兩個方程式的等號成立，

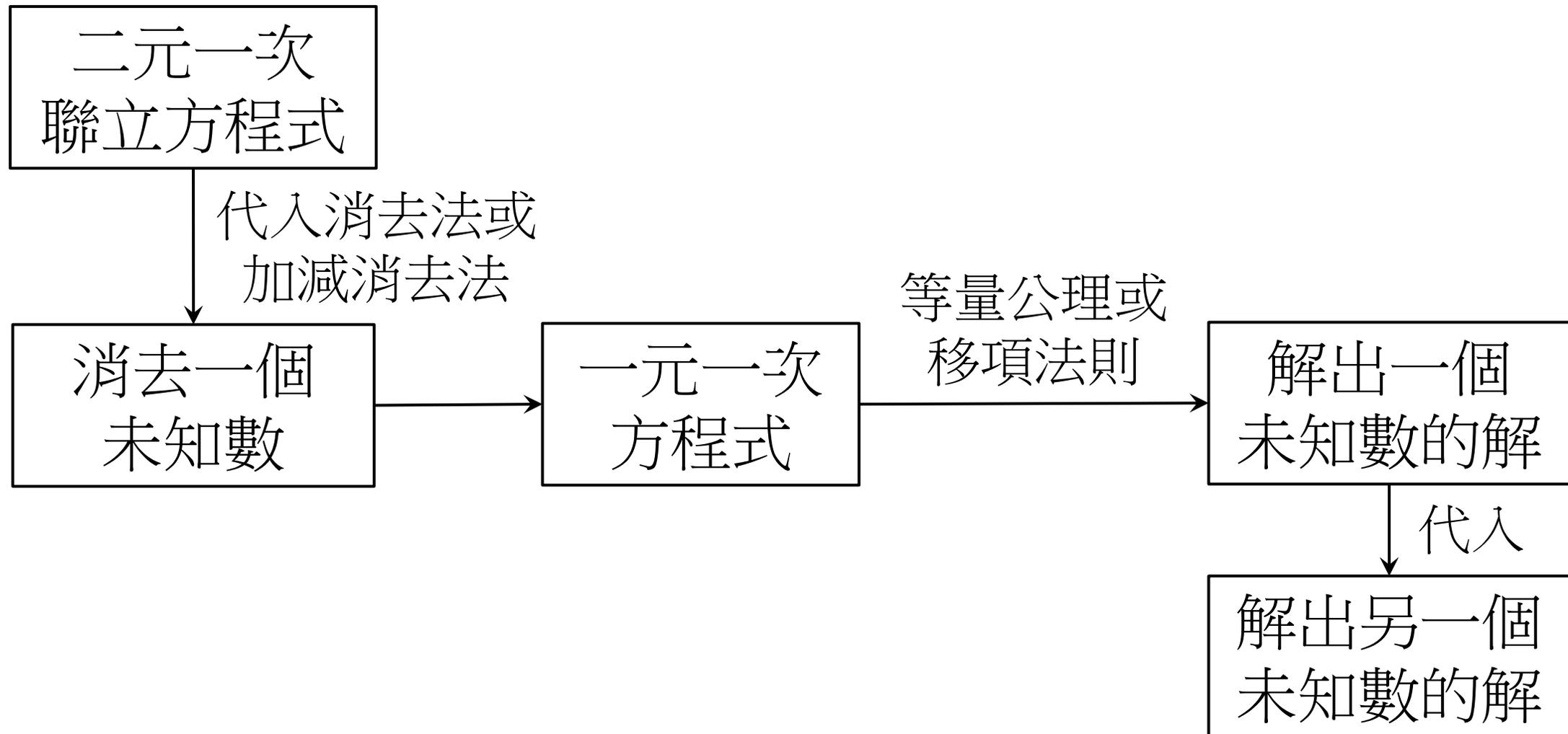
所以 $\begin{cases} x=60 \\ y=30 \end{cases}$ 就是二元一次聯立方程式

$\begin{cases} 5x+2y=360 \\ 3x+y=210 \end{cases}$ 的解。

也就是說，動物園全票每張 60 元，優待票每張 30 元。



3 解二元一次聯立方程式



1 下列各組數中，哪些是二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \text{ 的解?}$$

(1) $x=1$ 、 $y=2$ (2) $x=\frac{1}{2}$ 、 $y=-2$ (3) $x=2$ 、 $y=-1$

解 列表來表示將 x 、 y 代入後等號是否成立：

| | x | y | $3x + y = 5$ | $2x - 3y = 7$ |
|-----|---------------|-----|--------------|---------------|
| (1) | 1 | 2 | 是 | 否 |
| (2) | $\frac{1}{2}$ | -2 | 否 | 是 |
| (3) | 2 | -1 | 是 | 是 |



1 下列各組數中，哪些是二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \text{ 的解?}$$

(1) $x=1$ 、 $y=2$ (2) $x=\frac{1}{2}$ 、 $y=-2$ (3) $x=2$ 、 $y=-1$

解 所以 (3) $x=2$ 、 $y=-1$ 這組數是二元一次聯立方程

式 $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$ 的解



2 解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} x=3y & \dots\dots ① \\ 2x-5y=-2 & \dots\dots ② \end{cases}$$

解 將①式代入②式，得 $2 \times 3y - 5y = -2$
 $y = -2$

將 $y = -2$ 代入①式，得 $x = -6$

所以 $\begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



2 解下列各二元一次聯立方程式。

$$(2) \begin{cases} x = 3y - 1 & \dots\dots ① \\ \frac{1}{3}x + 5y = \frac{5}{3} & \dots\dots ② \end{cases}$$

解

將①式代入②式，

$$\text{得 } \frac{1}{3}(3y - 1) + 5y = \frac{5}{3}, y = \frac{1}{3}$$

將 $y = \frac{1}{3}$ 代入①式，得 $x = 0$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



2 解下列各二元一次聯立方程式。

$$(3) \begin{cases} 3x + y = 13 & \dots\dots ① \\ 2x - y = -3 & \dots\dots ② \end{cases}$$

解

① + ② 得 $5x = 10$, $x = 2$

將 $x = 2$ 代入①式，得 $y = 7$

所以 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



2 解下列各二元一次聯立方程式。

$$(4) \begin{cases} 2x + 3y = -16 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x - 2y = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解

想消去 y

將 $\textcircled{1} \times 2$ 、 $\textcircled{2} \times 3$ 得 $\begin{cases} 4x + 6y = -32 \cdots \cdots \textcircled{3} \\ 9x - 6y = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$

$\textcircled{3} + \textcircled{4}$ 得 $13x = -26$ ， $x = -2$

將 $x = -2$ 代入 $\textcircled{1}$ 式，得 $y = -4$

所以 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



2 解下列各二元一次聯立方程式。

$$(5) \begin{cases} x + 10y = -2x + 8y + 5 & \dots\dots ① \\ 2x - 1 = -x + y + 1 & \dots\dots ② \end{cases}$$

解 整理原方程式，得 $\begin{cases} 3x + 2y = 5 & \dots\dots ③ \\ 3x - y = 2 & \dots\dots ④ \end{cases}$

③ - ④ 得 $3y = 3$ ， $y = 1$

將 $y = 1$ 代入④式，得 $x = 1$

所以 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解



2 解下列各二元一次聯立方程式。

$$(6) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{6} = \frac{1}{3} & \dots\dots ① \\ -5x + 2y = -1 & \dots\dots ② \end{cases}$$

解

將①×6 得 $3x - y = 2$ $\dots\dots ③$

③×2 得 $6x - 2y = 4$ $\dots\dots ④$

② + ④ 得 $x = 3$

將 $x = 3$ 代入③式，得 $y = 7$

所以 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解

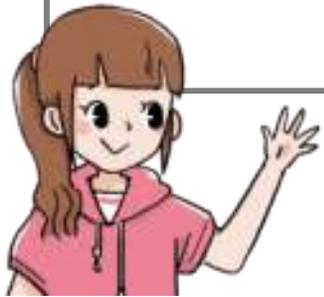


挑戰題

小妍和小美兩人對於「解二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \dots\dots ① \\ 3x + 2y = 8 \dots\dots ② \end{cases}$$
」的說法如下。判斷他們的說法
 是否正確，並說明你的理由。

利用① \times 3-②
 消去 x ，可得 $-7y=11$ 。



小妍

由①式可得 $x = -1 + 3y$ ，
 並代入②式可得 $y = \frac{11}{5}$ 。



小美



挑錯題

小妍：正確；錯誤，

理由： $\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2}$ 得 $-11y = -11$

小美：正確；錯誤，

理由：由 $\textcircled{1}$ 可得 $x = -1 + 3y$ ，
代入 $\textcircled{2}$ 式得 $11y = 11$ ， $y = 1$



學完囉！
前往 ➡ 下一章節



下列各組數中，哪一組是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y=15 \\ 2x+y=23 \end{cases}$ 的解？

(A) $x=3$ 、 $y=4$

(B) $x=8$ 、 $y=7$

(C) $x=-4$ 、 $y=19$

解 (B)



下列各組數中，哪一組是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$ 的解？

(A) $x = 4$ 、 $y = 2$

(B) $x = -3$ 、 $y = 16$

(C) $x = 1$ 、 $y = 8$

解 (A)



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} x=y \\ 3x+5y=16 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x=2y \\ x+y=39 \end{cases}$$

解

$$(1) x=2, y=2$$

$$(2) x=26, y=13$$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x = -y \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x = -2y \end{cases}$$

解

$$(1) x = -4, y = 4$$

$$(2) x = 2, y = -1$$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} x = 2y \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = -3x \\ 2y + x = 5 \end{cases}$$

解

$$(1) x = 7, y = \frac{7}{2}$$

$$(2) x = -1, y = 3$$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} x = -2y \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ 3x + 5y = 26 \end{cases}$$

解

$$(1) x = 4, y = -2$$

$$(2) x = 2, y = 4$$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} x = 5 + 3y \\ 3x - y = -1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$$

解

$$(1) x = -1, y = -2$$

$$(2) x = 3, y = 2$$



若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x=y+4 \\ 2x-3y=9 \end{cases}$ 的解為 $x=a$ ， $y=b$ ，

則 $a+b$ 之值為何？

解 2



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 40 \\ 2x + 5y = 91 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases}$$

解

$$(1) x = 18, y = 11$$

$$(2) x = 4, y = 1$$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 2x + y = 9 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + y = 16 \\ 3x + 2y = 26 \end{cases}$$

解

$$(1) x = \frac{17}{4}、y = \frac{1}{2}$$

$$(2) x = 6、y = 4$$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ x - 4y = -1 \end{cases}$$

解

$$(1) x = 1, y = 1$$

$$(2) x = 3, y = 1$$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 2x = 6y - 2 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x = 14 - 5y \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

解

$$(1) x = 2, y = 1$$

$$(2) x = 3, y = 1$$



小妍在夜市買了 2 串烤香腸和 3 杯翡翠檸檬茶，花了 215 元；小翊買了 3 串烤香腸和 3 杯翡翠檸檬茶，花了 240 元，則 1 串烤香腸和 1 杯翡翠檸檬茶各是多少元？

解 1 串烤香腸 25 元，1 杯翡翠檸檬茶 55 元



在下列□中填入「+」或「-」使直式計算成立。

$$\begin{array}{r} (1) \quad \quad \quad -5x \\ \square + \quad \quad \quad 5x \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) \quad \quad \quad 3y \\ \square - \quad \quad \quad -3y \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$



在下列□中填入「+」或「-」使直式計算消去 x ，
並寫出計算結果。

$$\begin{array}{r} 7x - 4y \\ \square +) \quad -7x - 4y \\ \hline (\quad -8y \end{array}$$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} -x + 2y = 15 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

解

$$(1) x = 2, y = 1$$

$$(2) x = -7, y = 4$$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

解

$$(1) x = 1, y = 2$$

$$(2) x = 2, y = 3$$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 6x + 2y = 14 \end{cases}$$

解

$$(1) x = 1, y = 3$$

$$(2) x = 2, y = 1$$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ -x + y = -7 \end{cases}$$

解

$$(1) x = \frac{18}{5}、y = \frac{6}{5}$$

$$(2) x = 6、y = -1$$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 2x + 3y = \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 3x + 2y = 23 \end{cases}$$

解 (1) $x=1$ 、 $y=\frac{3}{2}$
(2) $x=7$ 、 $y=1$



若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 5x + 3y = 29 \end{cases}$ 的解為 $x = a$ ， $y = b$ ，

則 $a - b = ?$

解 1



解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 8x = 2x + 2y - 6 \\ 5x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$ 。

解 $x = -2$ 、 $y = -3$



解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 1 - 2x + 3y = -3(x + y) \\ 3x + 2y - 1 = 3(x + y) \end{cases}$ 。

解 $x = 5$ 、 $y = -1$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 5x + 2y = 6 \\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y = -3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 2 \\ x - \frac{y}{2} = -5 \end{cases}$$

解

$$(1) x = -2, y = 8$$

$$(2) x = -16, y = -22$$



解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 1 \\ \frac{3}{2}x - 2y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{3}{2}x + y = \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2}x - 2y = 2 \end{cases}$$

解

$$(1) x = 1, y = \frac{1}{2}$$

$$(2) x = 2, y = \frac{1}{2}$$

