

# 2-2 二元一次方程式 的圖形

主題1 二元一次方程式的圖形

主題2 二元一次方程式圖形的畫法

重點整理

自我評量

一題多解

數學新視界

在第 1 章我們已經知道一個二元一次方程式有無限多組解。對於任意一組解，我們還可以用數對  $(x, y)$  的形式來表示。例如： $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 、……都是  $x-2y=1$  的一組解，  
也可以用數對  $(1, 0)$ 、 $(3, 1)$ 、……來表示。

當我們用數的形式來表示二元一次方程式的解時，可以把這個數對當成坐標，然後在坐標平面上標出這個坐標所對應的點。事實上，二元一次方程式的每一組解，都能在坐標平面上找到一個點與它對應。



把二元一次方程式所有的解描在坐標平面所形成的圖形，就稱為此二元一次方程式的圖形。我們來看下面的例題。



數 學 好 好 玩 坐標平面由來的傳說





## 笛卡兒

(*Rene Descartes*，西元 1596～1650 年)，蒼蠅飛行的動線是促使笛卡兒思考坐標平面的契機。



# 例 1 在坐標平面上描出二元一次方程式的解

搭配課本p68

任意找出方程式  $x - y = 0$  的七組解，並將它們描到坐標平面上。

**解**

如下表，先找出七組方程式  $x - y = 0$  的解：

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	-3	-2	-1	0	1	2	3

並把解描到坐標平面上，結果如下圖 1 的 ●。



# 例 1 在坐標平面上描出二元一次方程式的解

搭配課本p68

任意找出方程式  $x - y = 0$  的七組解，並將它們描到坐標平面上。

解

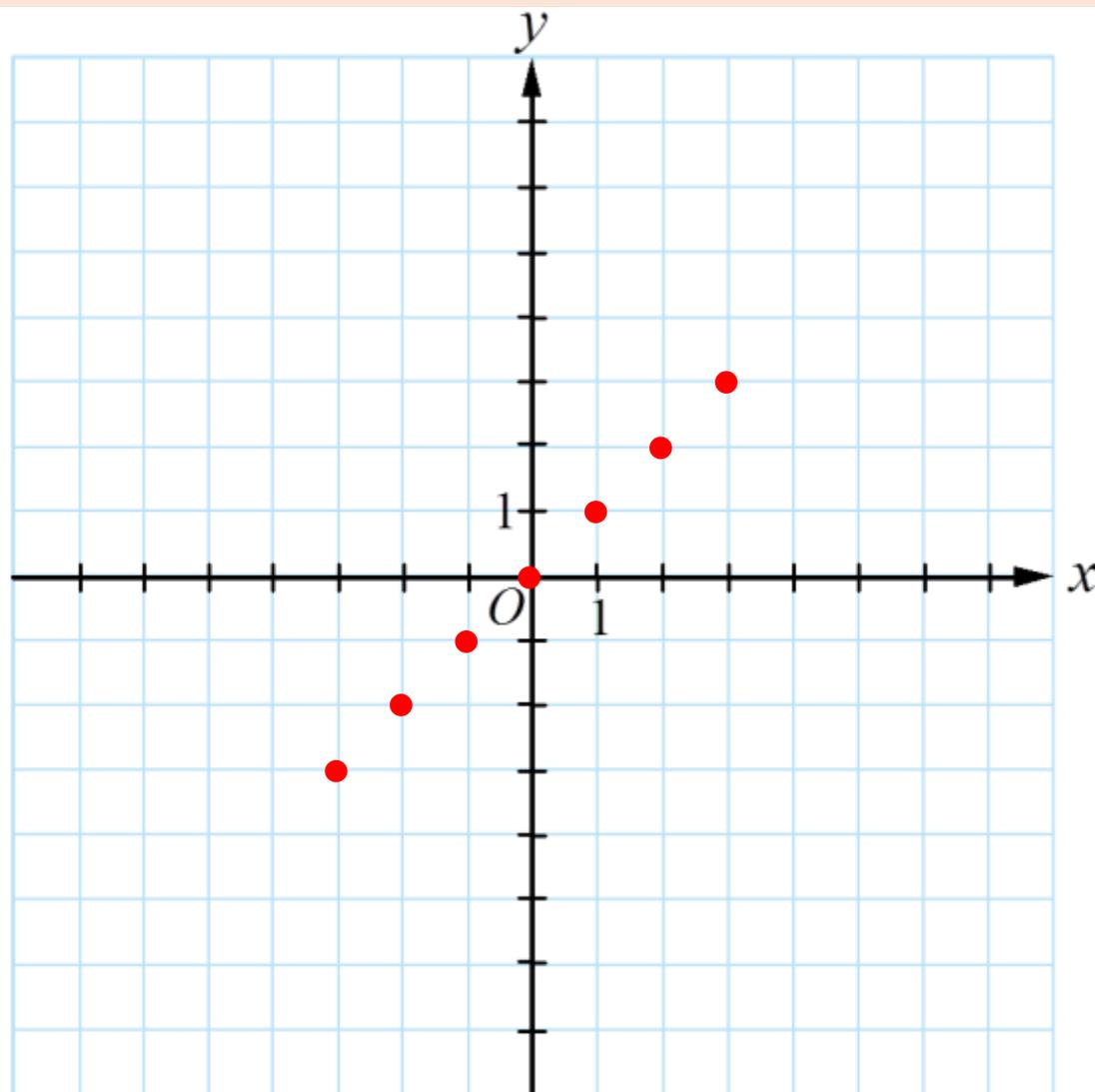


圖 1



承例 1，為了更進一步了解方程式  $x-y=0$  所形成的圖形，我們可以再找出方程式  $x-y=0$  更多的解，如下表：

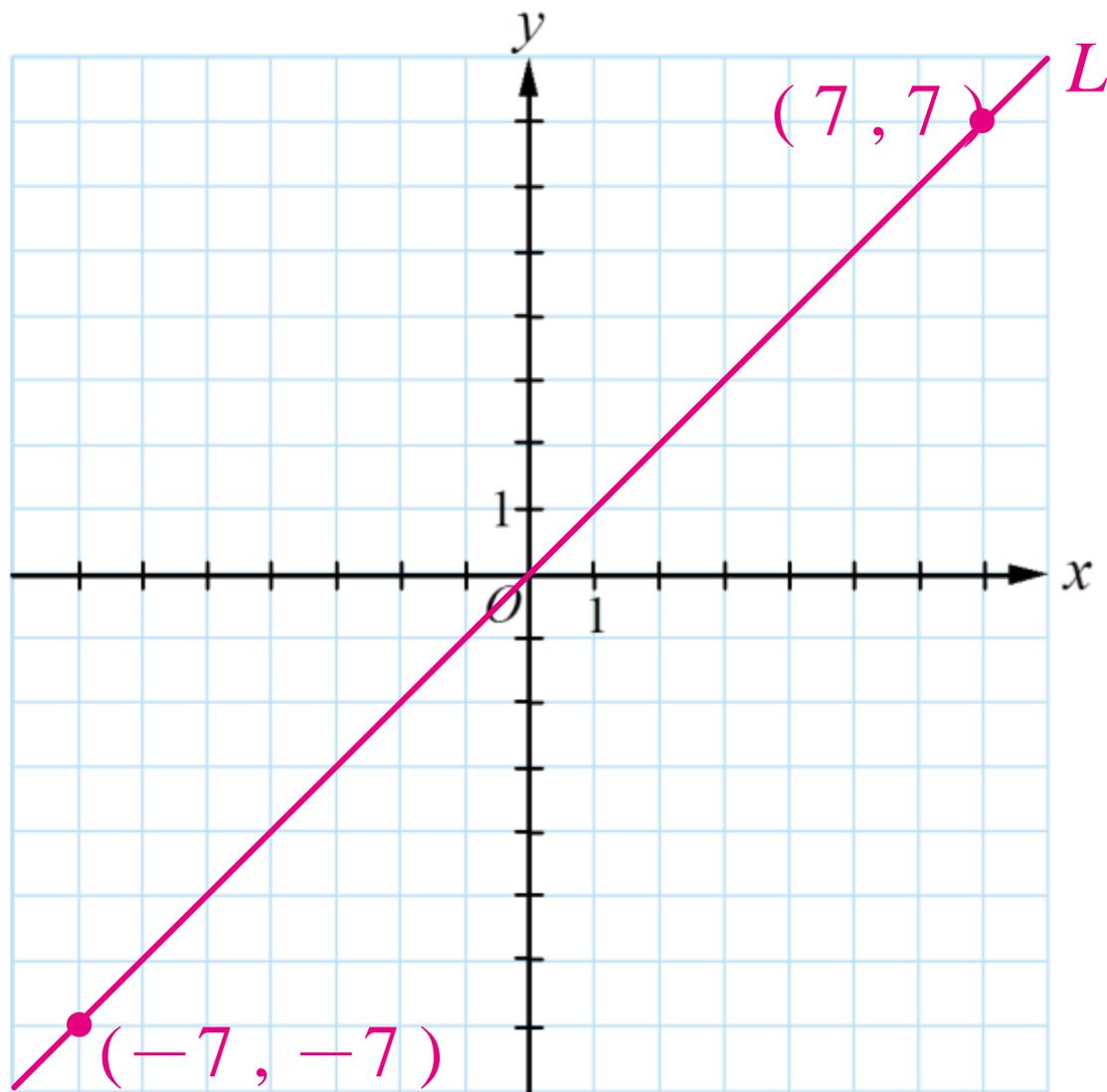
$x$	-7	-6	-5	-4	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4	5	6	7
$y$	-7	-6	-5	-4	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4	5	6	7

再將這些解也描到坐標平面上，結果如上圖 1 的 ●。我們繼續來看下面的問題探索。





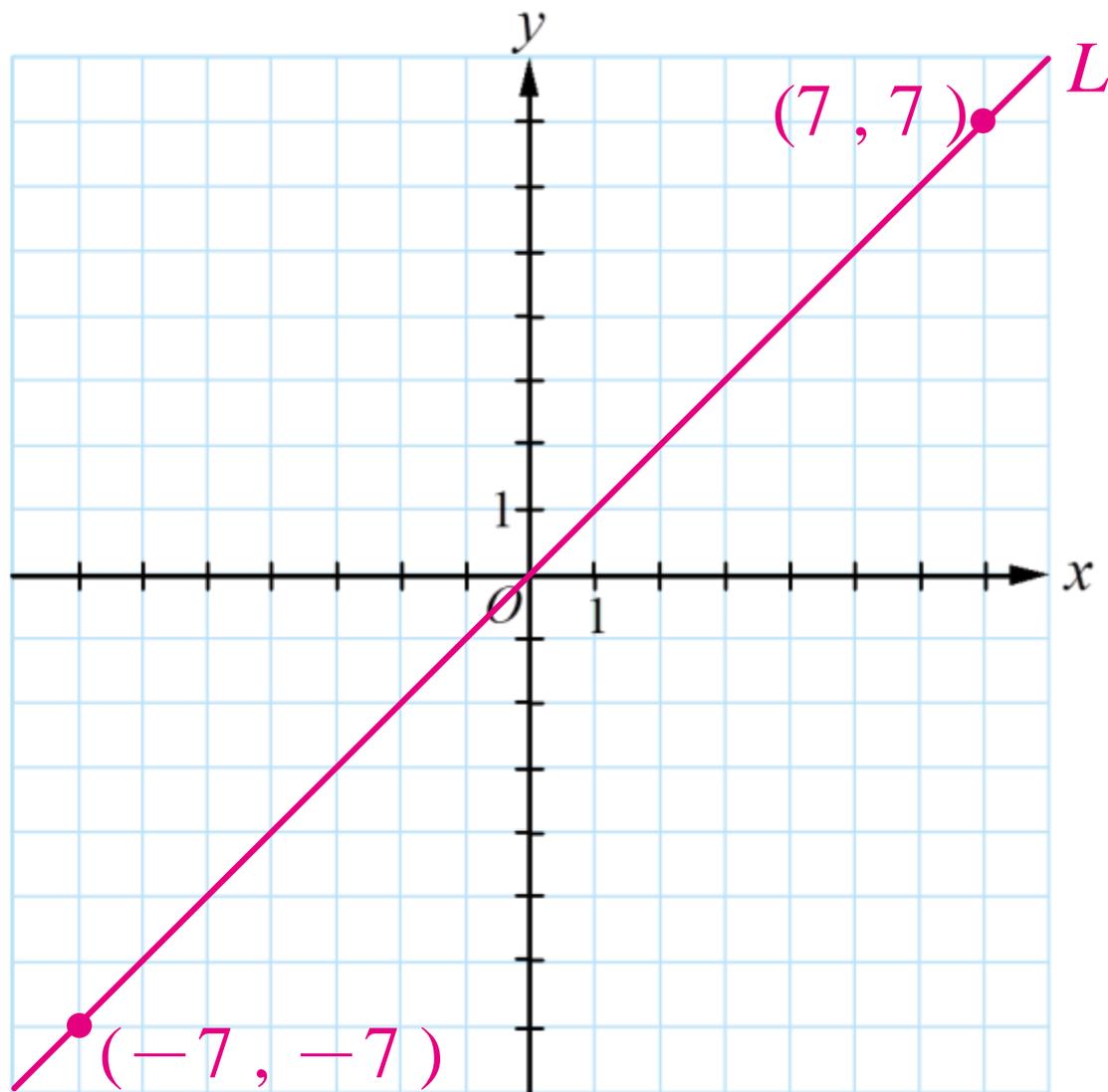
在下圖的坐標平面上，找出方程式  $x - y = 0$  的兩組解  $(-7, -7)$  和  $(7, 7)$  所代表的點，畫一條通過這兩點的直線，稱此直線為  $L$ ，並回答下列問題：



(1) 附件 1 是與圖 1 相同的透明片。將附件 1 的兩坐標軸與上圖的兩坐標軸疊合，則例 1 所描的點是否都落在直線  $L$  上？

**解**

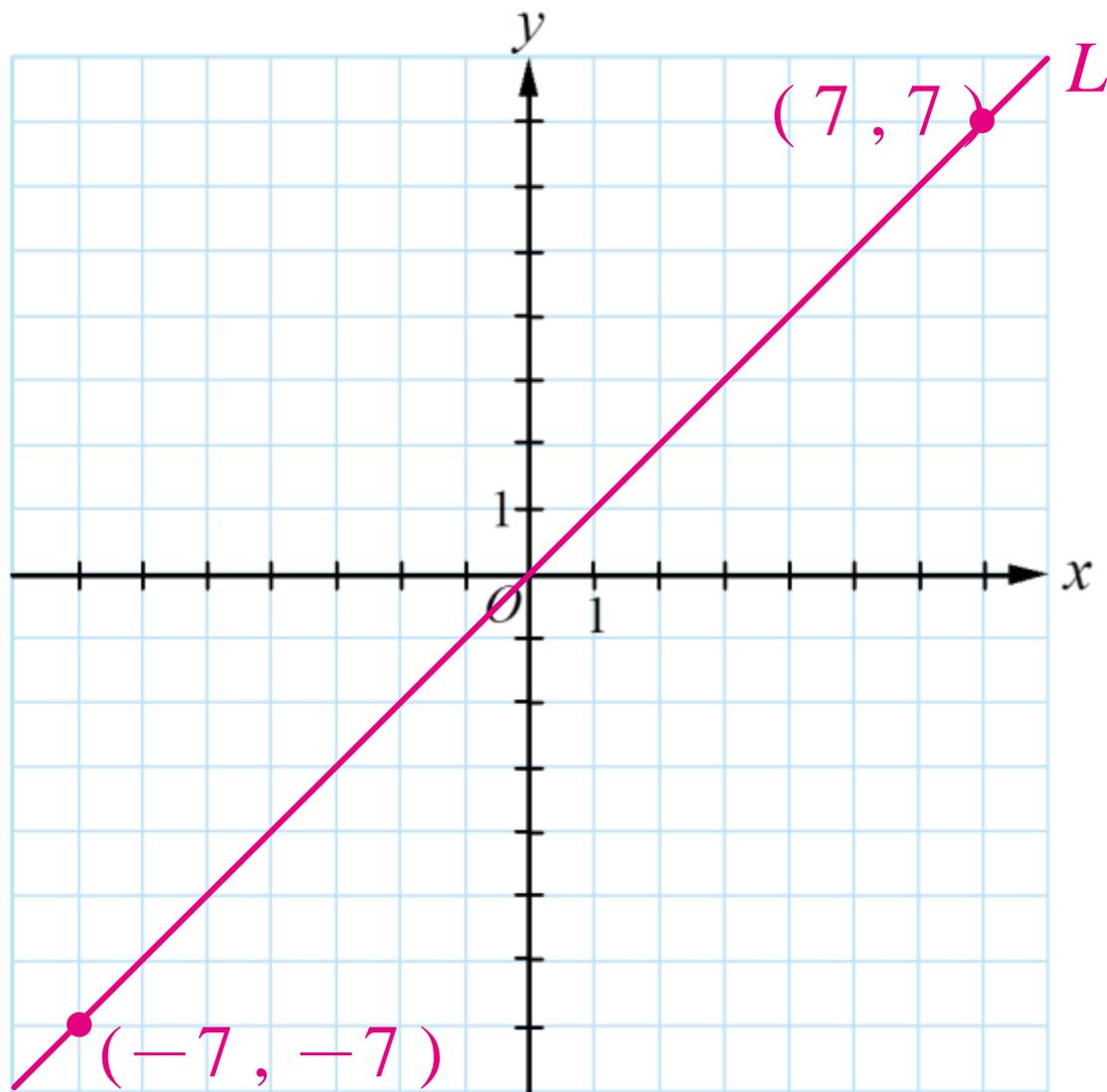
是



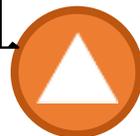
(2) 試著找出方程式  $x - y = 0$  的另一些解，將它們描在坐標平面上，並檢驗這些點是否都會落在直線  $L$  上。

解

是



事實上，二元一次方程式  $x - y = 0$  的解都會落在直線  $L$  上。  
我們說二元一次方程式  $x - y = 0$  在坐標平面上的圖形，就是直線  $L$ 。



## 例 2 在坐標平面上描出二元一次方程式的解

搭配課本p70

任意找出方程式  $2x - y = 1$  的七組解，並將它們描到坐標平面上。

**解**

如下表，先找出七組方程式  $2x - y = 1$  的解：

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	-7	-5	-3	-1	1	3	5

把解描到坐標平面上，結果如下圖 2 的 ●。



# 例 2 在坐標平面上描出二元一次方程式的解

搭配課本p70

任意找出方程式  $2x - y = 1$  的七組解，並將它們描到坐標平面上。

解

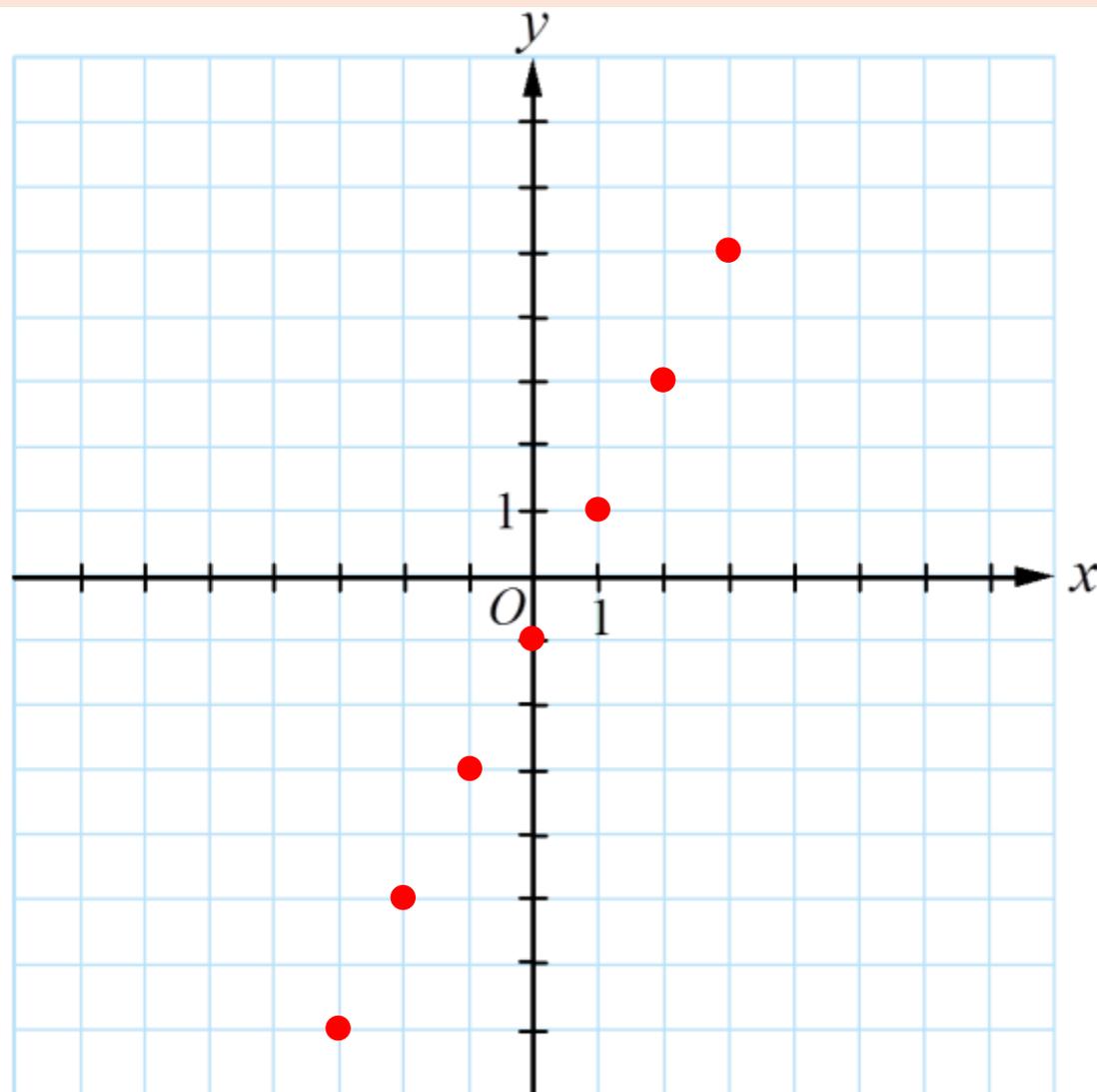


圖 2



在例 2 中，我們還可以繼續找出方程式  $2x - y = 1$  幾組不同的解，如下表：

$x$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	4
$y$	-6	-4	-2	0	2	4	7

再將這些解也描到坐標平面上，結果如上圖 2 的 ●。



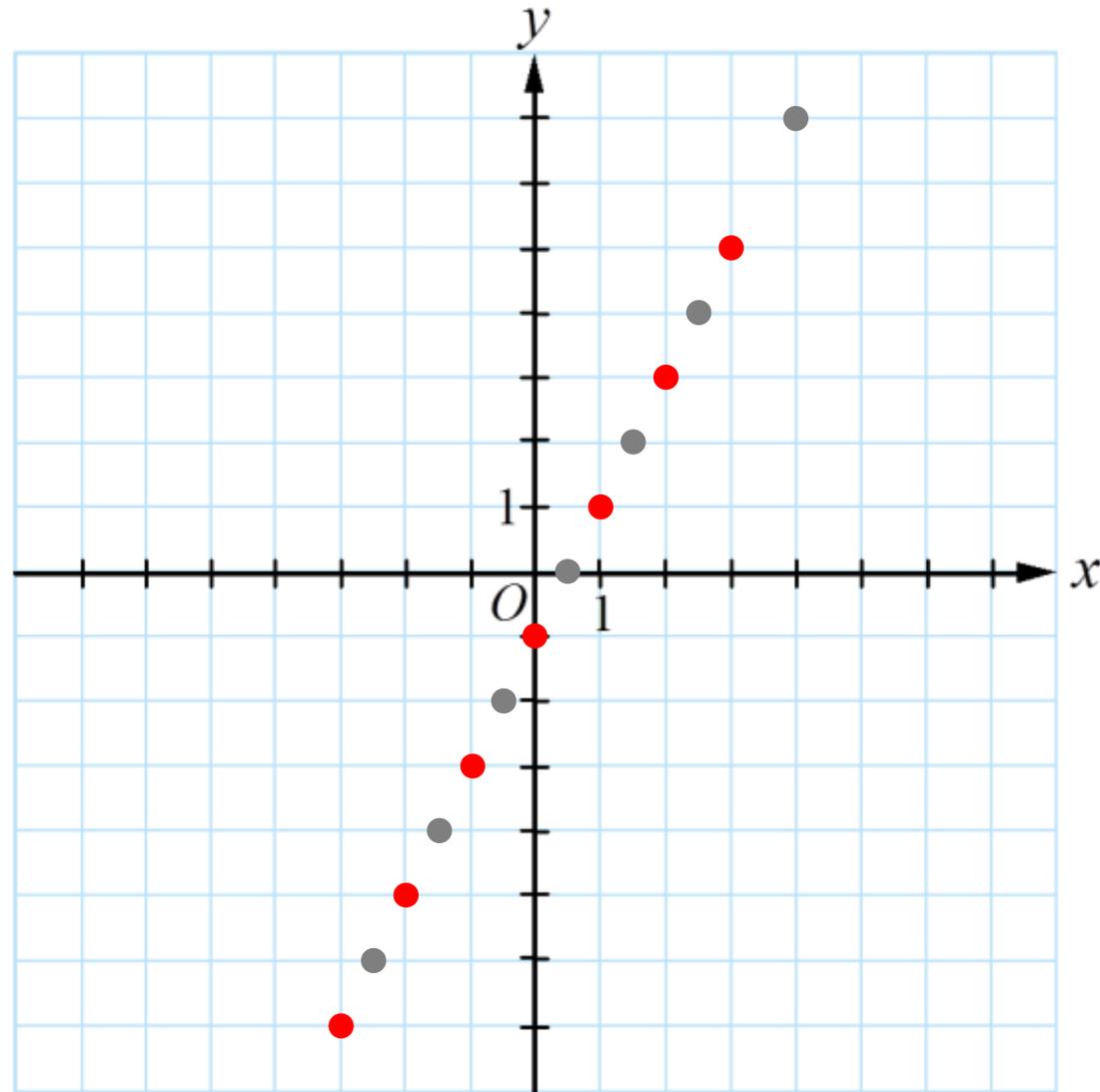


圖 2



仿照第 69 頁問題探索的方式，先找出圖 2 中的任意兩點，例如  $(-3, -7)$  和  $(3, 5)$ ，再畫一條直線通過這兩點，稱此直線為  $M$ ，如圖 3。

事實上，二元一次方程式  $2x - y = 1$  在坐標平面上的圖形，就是直線  $M$ 。

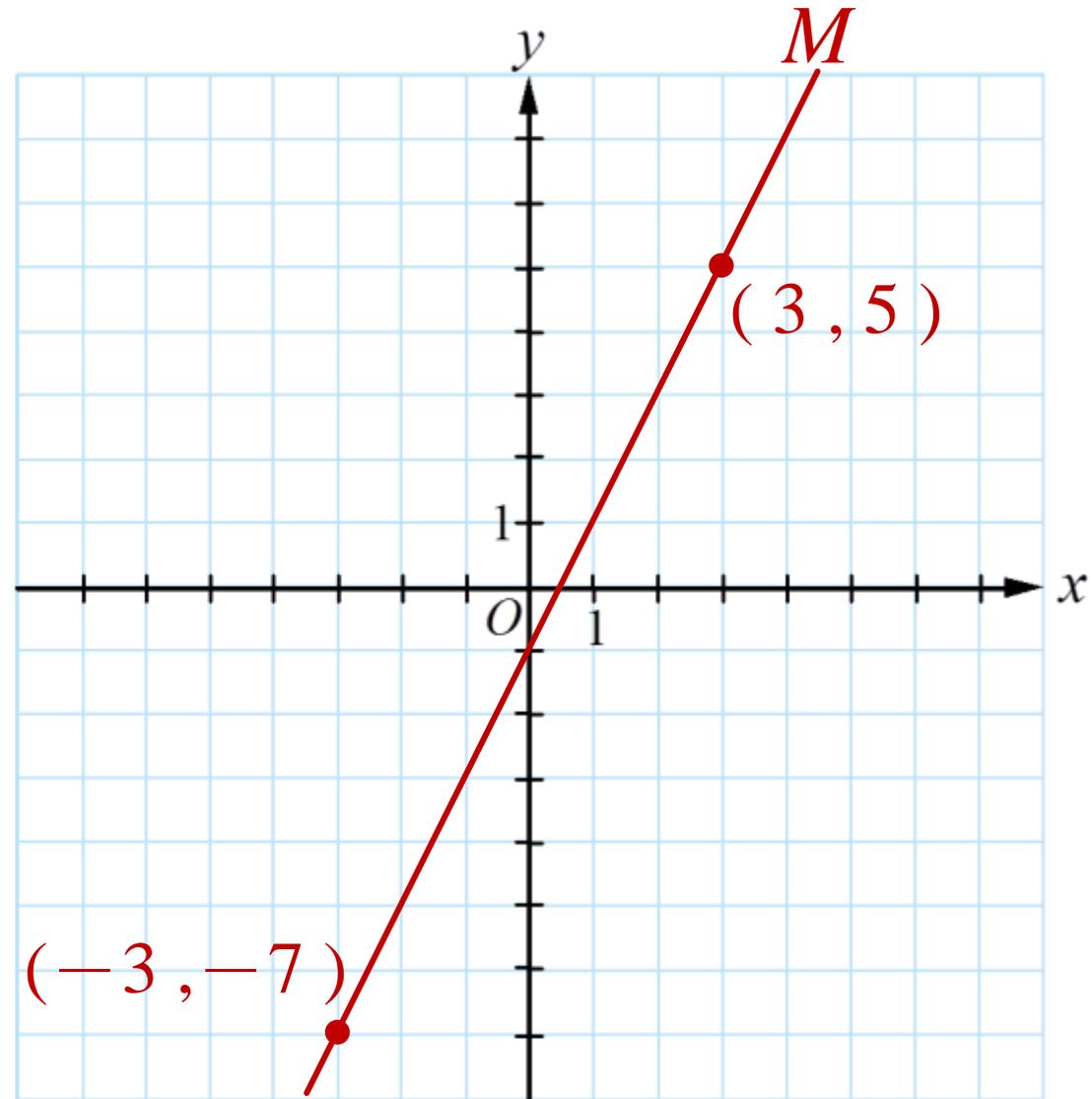
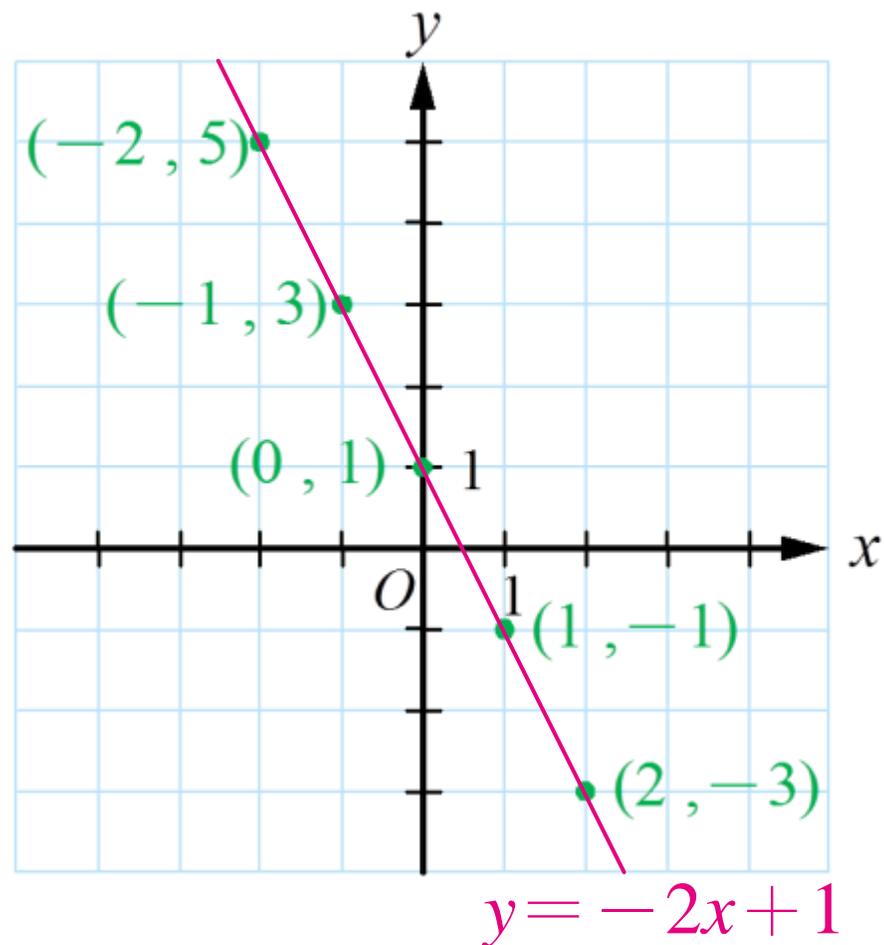


圖 3



如下圖，若坐標平面上的這五個點都是二元一次方程式  $y = -2x + 1$  的解，則方程式  $y = -2x + 1$  的圖形為何？並在坐標平面上畫出來。

**解** 畫一條直線連接五個點，  
方程式  $y = -2x + 1$  的圖形  
為一條直線，如右圖所示



經由前面的討論，我們可以知道在坐標平面上，二元一次方程式  $x - y = 0$ 、 $2x - y = 1$  和  $y = -2x + 1$  的圖形都是一條直線。

事實上，在坐標平面上，二元一次方程式的圖形是一條直線。



## 畫出二元一次方程式的圖形

我們知道，通過相異兩點畫出來的直線只有一條。而二元一次方程式的圖形是一條直線，所以要畫二元一次方程式的圖形時，只要找出任意兩組解，把它們對應的點描在坐標平面上，再畫一條直線通過這兩點，這條直線就是這個二元一次方程式的圖形。我們來看下面的例題。



# 例 3 畫出二元一次方程式的圖形

搭配課本p72

在坐標平面上，畫出方程式  $y=2x-2$  的圖形。

**解**

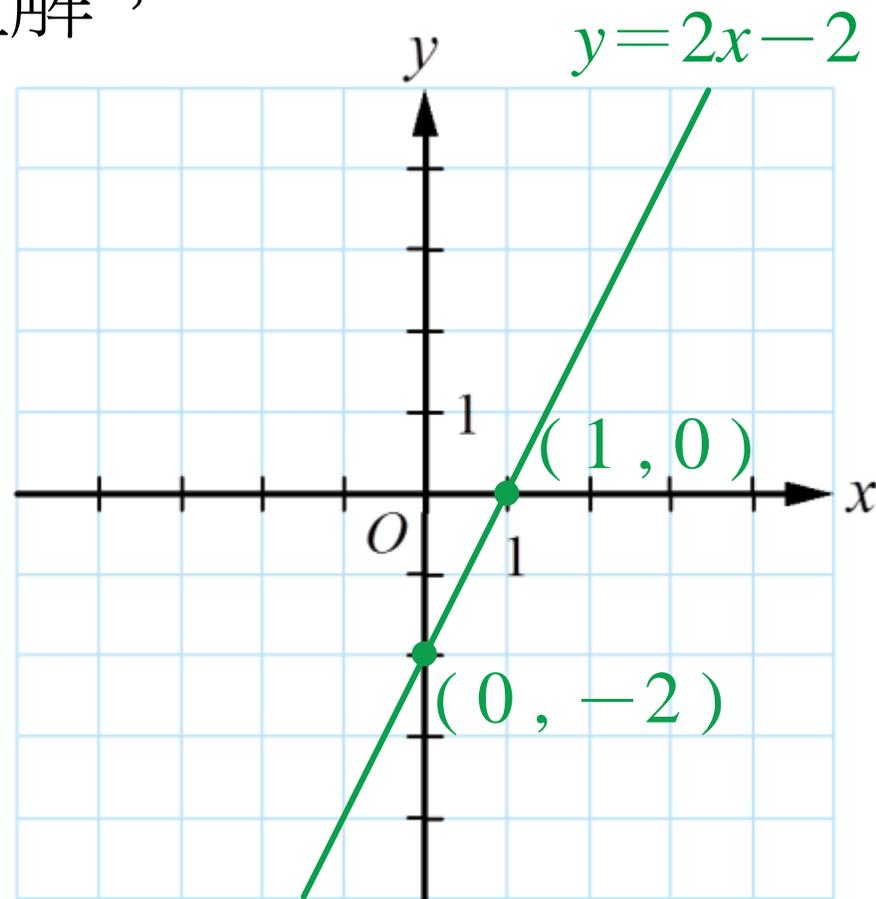
步驟 1 找出  $y=2x-2$  的任意兩組解，

$x$	0	1
$y$	-2	0

步驟 2 將  $(0, -2)$ 、 $(1, 0)$   
描到坐標平面上。

步驟 3 畫一條直線通過這兩點。

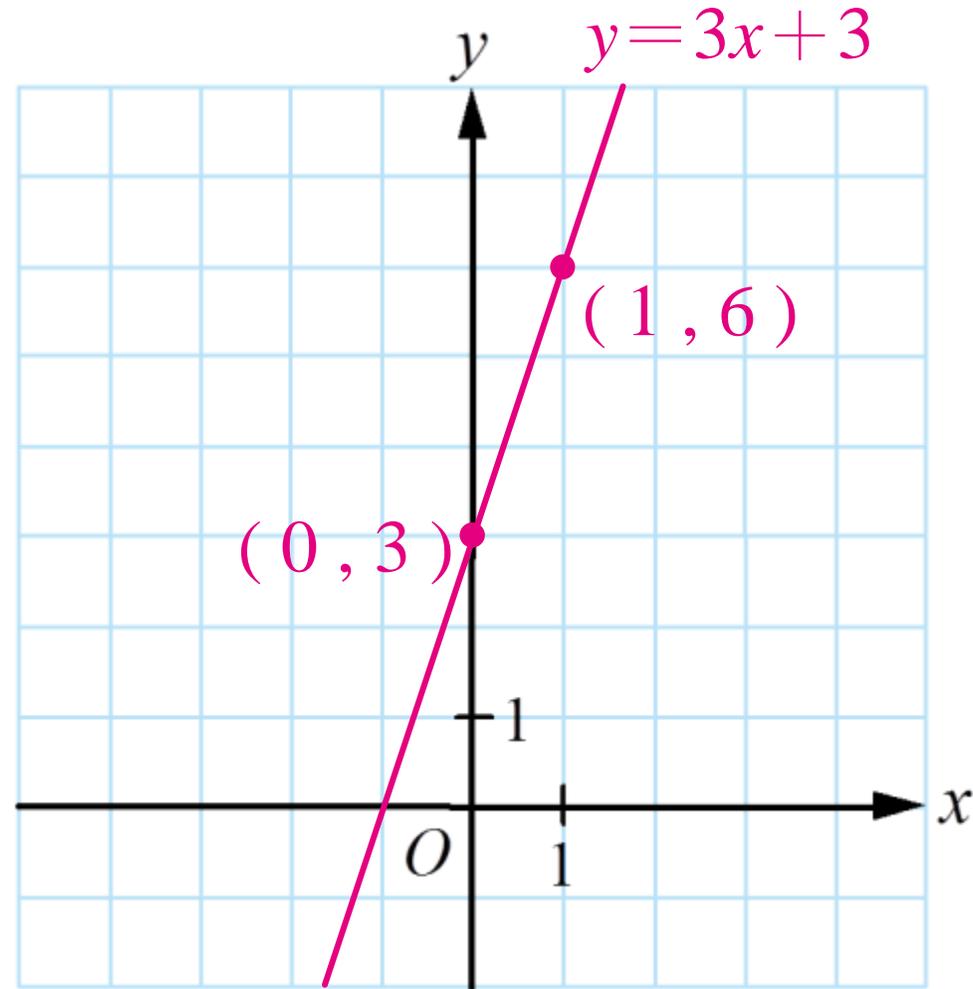
此直線就是方程式  $y=2x-2$  的  
圖形，如右圖所示。



在坐標平面上，畫出方程式  $y=3x+3$  的圖形。

解

$x$	0	1
$y$	3	6



# 例 4 二元一次方程式圖形的特性

搭配課本p73

- (1) 求方程式  $2x + 5y = 10$  的圖形與  $x$  軸、 $y$  軸的交點坐標。
- (2) 承(1)，畫出方程式  $2x + 5y = 10$  的圖形，並判斷此圖形 不通過 第幾象限？

**解**

- (1) ①  $x$  軸上任意一點的  $y$  坐標必為  $0$ ，  
將  $y=0$  代入方程式  $2x + 5y = 10$ ，  
得到一組解  $(5, 0)$ ，  
即為此圖形與  $x$  軸的交點坐標。
- ②  $y$  軸上任意一點的  $x$  坐標必為  $0$ ，  
將  $x=0$  代入方程式  $2x + 5y = 10$ ，  
得到一組解  $(0, 2)$ ，  
即為此圖形與  $y$  軸的交點坐標。

**Hint**

求方程式兩軸的交點時，可用  $y=0$ 、 $x=0$  分別代入。



# 例 4 二元一次方程式圖形的特性

搭配課本p73

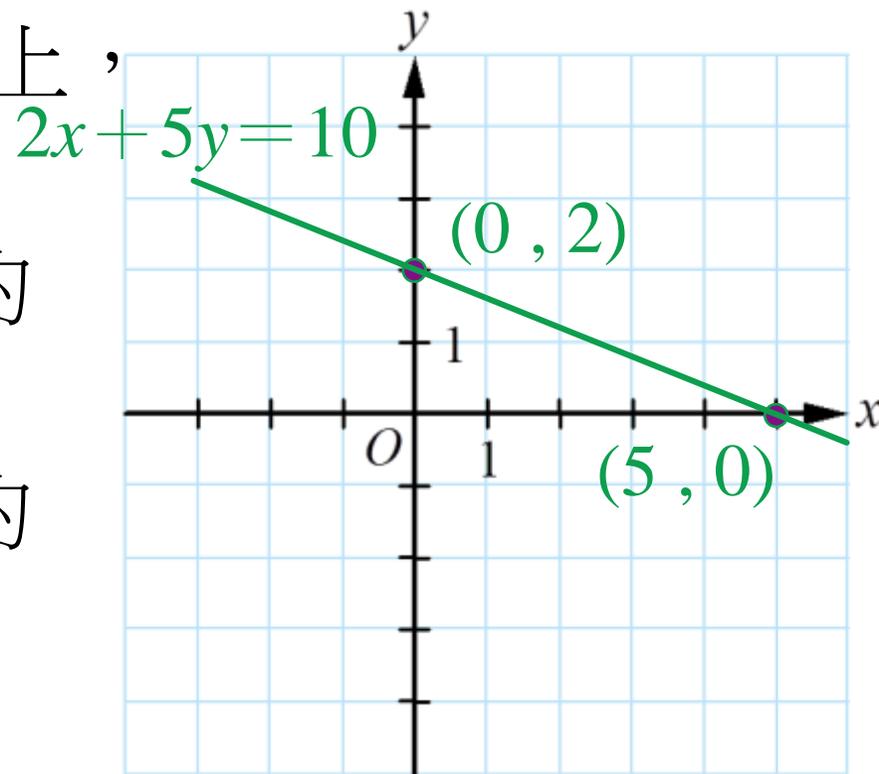
- (1) 求方程式  $2x + 5y = 10$  的圖形與  $x$  軸、 $y$  軸的交點坐標。
- (2) 承(1)，畫出方程式  $2x + 5y = 10$  的圖形，並判斷此圖形 不通過第幾象限？

**解**

(2) 將  $(5, 0)$ 、 $(0, 2)$  描到坐標平面上，並畫一條直線通過這兩點。

此直線就是方程式  $2x + 5y = 10$  的圖形，如右圖所示。

由圖可知，方程式  $2x + 5y = 10$  的圖形不通過第三象限。





- (1) 求方程式  $3x + 4y + 12 = 0$  的圖形與  $x$  軸、 $y$  軸的交點坐標。
- (2) 承(1)，畫出方程式  $3x + 4y + 12 = 0$  的圖形，並判斷此圖形不通過第幾象限？

**解**

- (1) ① 將  $y=0$  代入  
得到與  $x$  軸的交點坐標為  $(-4, 0)$
- ② 將  $x=0$  代入  
得到與  $y$  軸的交點坐標為  $(0, -3)$



- (1) 求方程式  $3x + 4y + 12 = 0$  的圖形與  $x$  軸、 $y$  軸的交點坐標。
- (2) 承(1)，畫出方程式  $3x + 4y + 12 = 0$  的圖形，並判斷此圖形 不通過第幾象限？

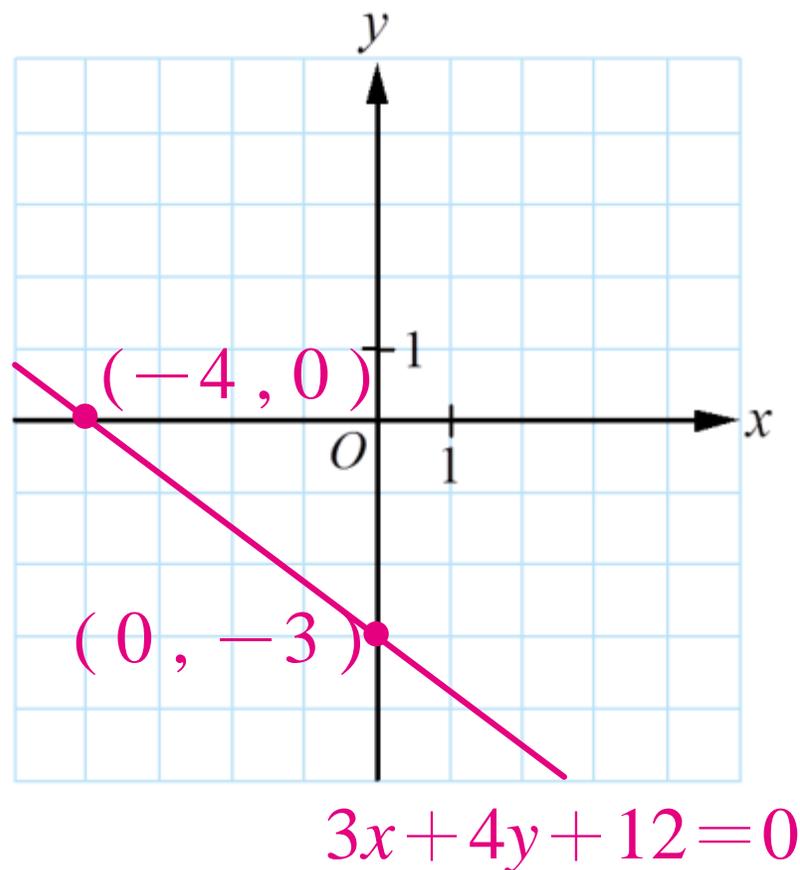
**解** (2) 將  $(-4, 0)$ 、 $(0, -3)$  描到坐標平面上

並畫直線通過這兩點

此直線即為方程式  $3x + 4y + 12 = 0$  的圖形

由圖可知

方程式  $3x + 4y + 12 = 0$  的圖形不通過第一象限



## 在坐標平面上畫出 $y=m$ 或 $x=n$ 的圖形

行動電話的通話費率通常會以「網內」和「網外」兩種方式計費，如下表所示。在不考慮其他費用情況下，假設每個月 200 元相當於網內可撥打  $x$  分鐘，網外可撥打  $y$  分鐘，則可列出二元一次方程式  $5x + 8y = 200$ 。

月租費 200 元(可抵等額通話費)		
通話費率	網內	5 元／每分鐘
	網外	8 元／每分鐘



若此資費推出優惠方案，改為網內免通話費，網外不變，則可列出  $0x + 8y = 200$ ，得到  $y = 25$ 。因此，我們也可將  $y = 25$  看成是  $0x + y = 25$ 。



## 你知道嗎？

行動電話的通話費率中，「網內」指的是撥打相同的電信用戶；「網外」指的是撥打不同的電信用戶。

## 1. $y=m$ 的圖形

在坐標平面上要畫出  $y=25$  的圖形，可先將其寫成  $0x+y=25$ ，再找到此方程式的兩組解，

$x$	$0$	$5$
$y$	$25$	$25$

將  $(0, 25)$ 、 $(5, 25)$  這兩點描到坐標平面上，並畫一條直線通過這兩點，如圖 4。可以發現， $0x+y=25$  的圖形是一條與  $y$  軸互相垂直的直線，且與  $y$  軸的交點為  $(0, 25)$ 。



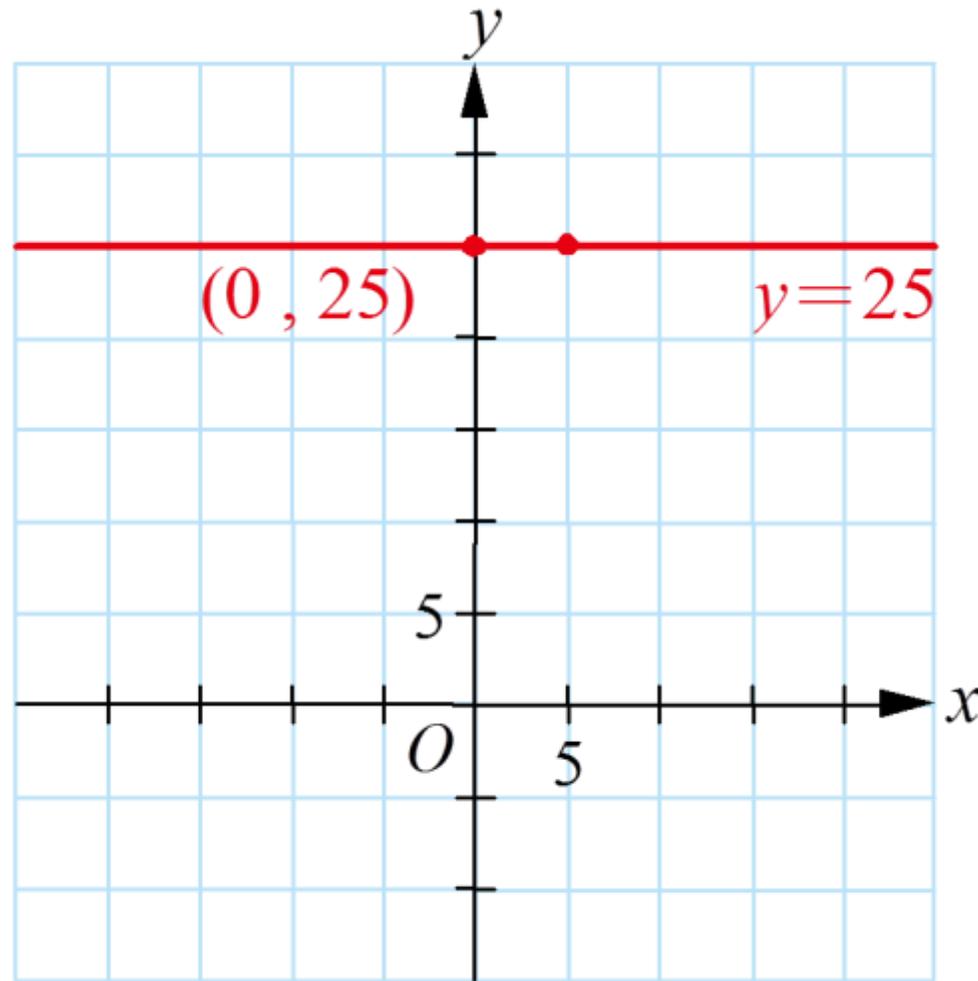


圖 4



## 2. $x=n$ 的圖形

同樣的，如果想畫出  $x=40$  的圖形，可先找到方程式  $x+0y=40$  的兩組解，

$x$	40	40
$y$	0	5

將  $(40, 0)$ 、 $(40, 5)$  這兩點描到坐標平面上，並畫一條直線通過這兩點，如圖 5。可以發現， $x+0y=40$  的圖形是一條與  $x$  軸互相垂直的直線，且與  $x$  軸交點為  $(40, 0)$ 。



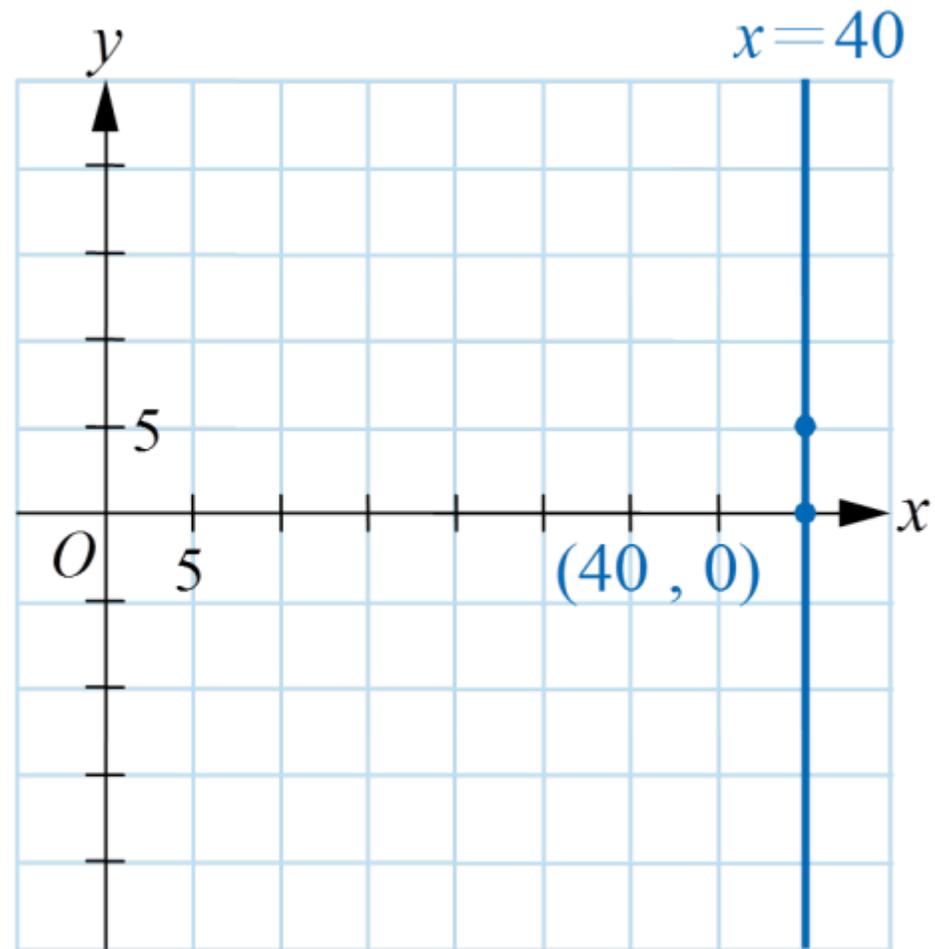


圖 5



事實上：

方程式  $y=m$  的圖形就是與  $y$  軸垂直於  $(0, m)$  的直線；

方程式  $x=n$  的圖形就是與  $x$  軸垂直於  $(n, 0)$  的直線。



更進一步：

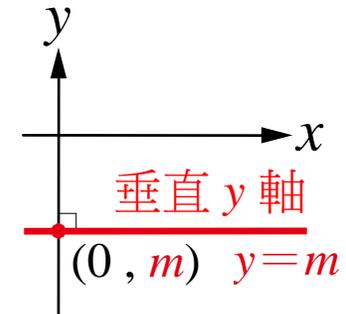
(1) 方程式  $y=0$  的圖形就是通過  $(0, 0)$  與  $y$  軸垂直的直線，也就是  $x$  軸。

(2) 方程式  $x=0$  的圖形就是通過  $(0, 0)$  與  $x$  軸垂直的直線，也就是  $y$  軸。

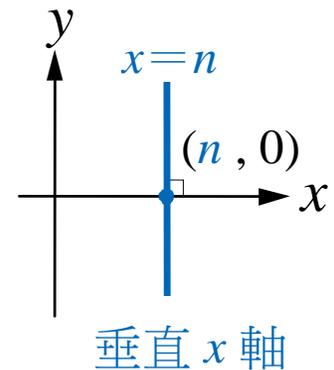
也就是說  $y=0$  的圖形就是  $x$  軸， $x=0$  的圖形就是  $y$  軸。

## 圖解筆記

$y=m$  的圖形



$x=n$  的圖形



# 例 5 畫出 $y = m$ 或 $x = n$ 的圖形

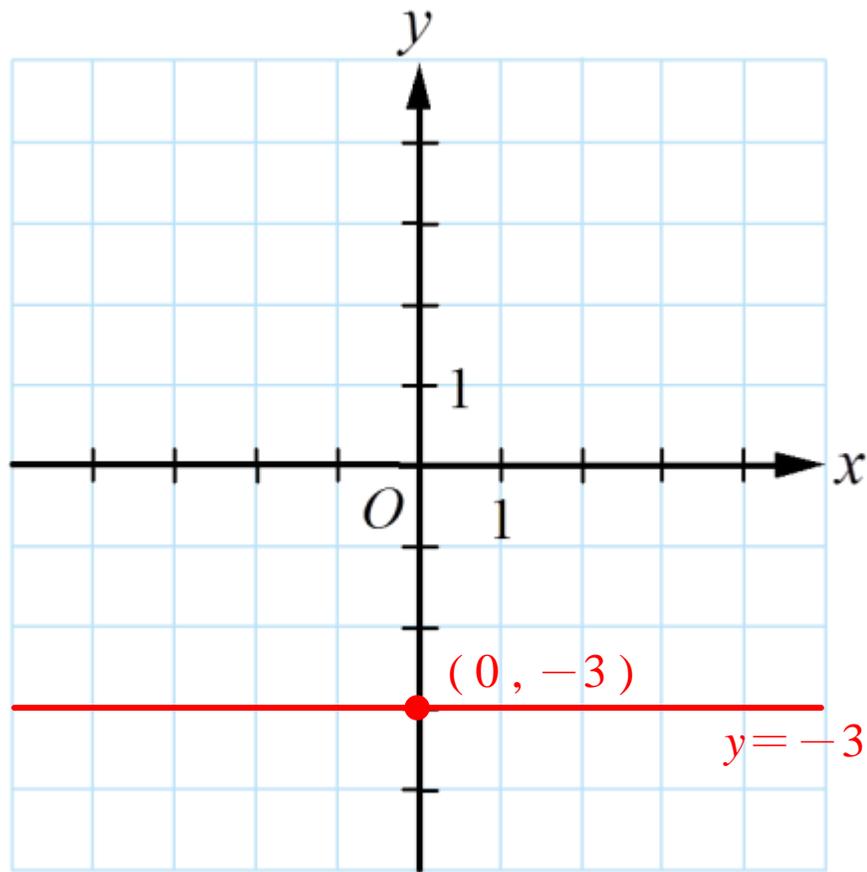
搭配課本p75

在坐標平面上，畫出下列方程式的圖形。

(1)  $y = -3$

(2)  $x = -2$

**解** (1)  $y = -3$  的圖形就是與  $y$  軸垂直於  $(0, -3)$  的直線，如右圖。



**Hint**

也可以各找兩組解來描點，然後畫出直線。



# 例 5 畫出 $y = m$ 或 $x = n$ 的圖形

搭配課本 p75

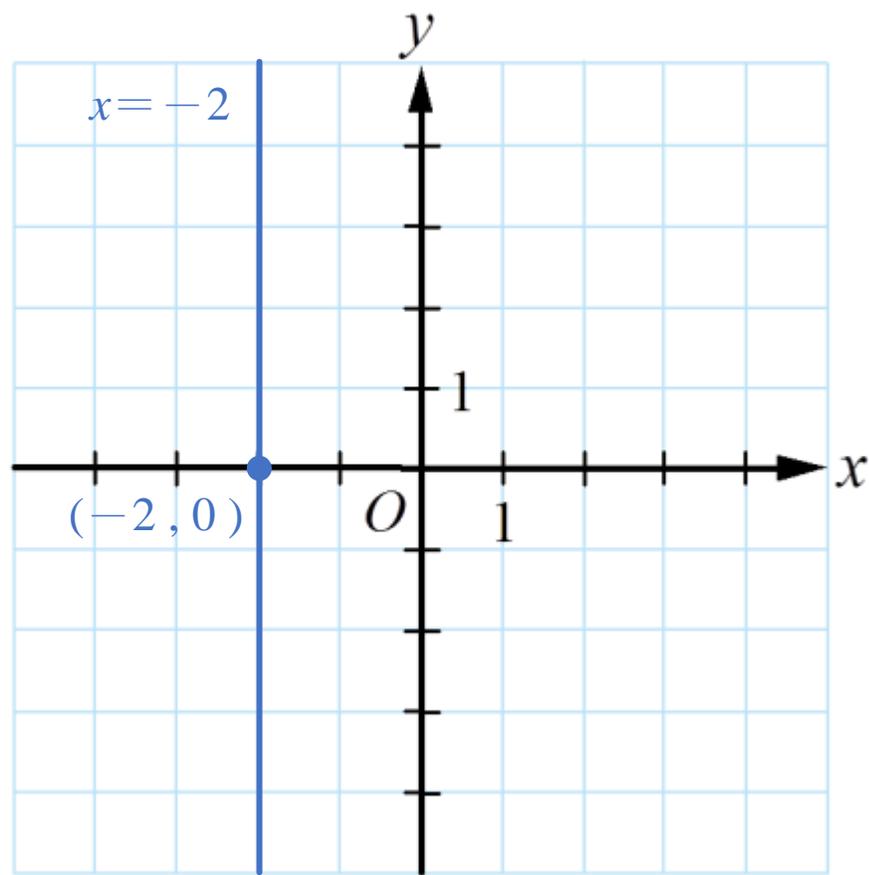
在坐標平面上，畫出下列方程式的圖形。

(1)  $y = -3$

(2)  $x = -2$

**解**

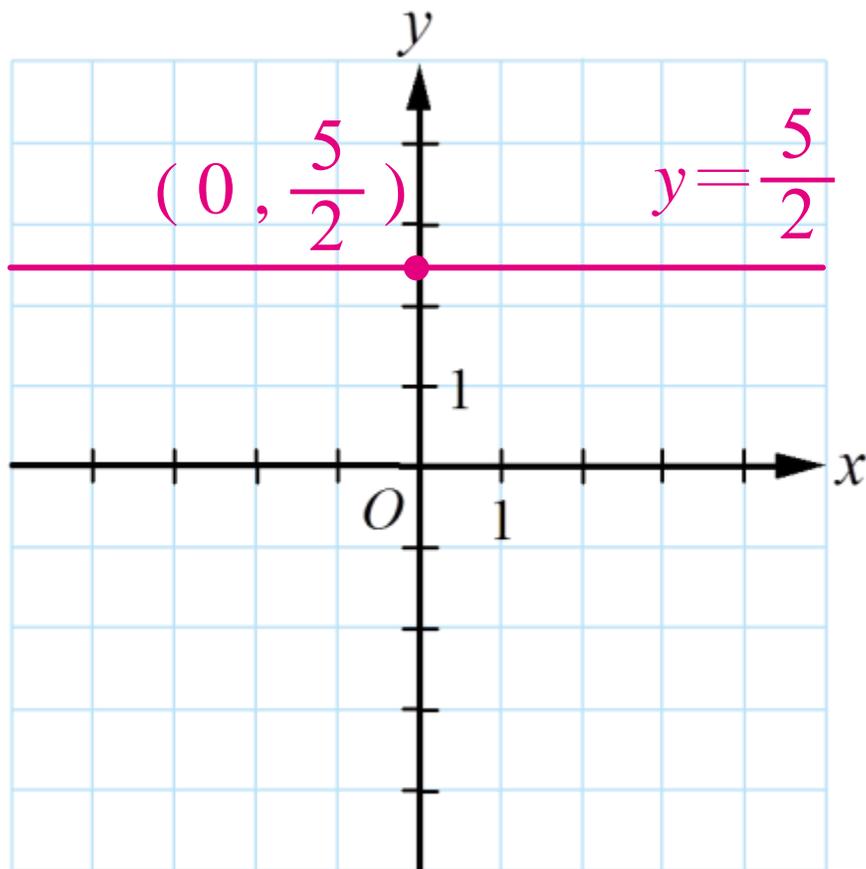
(2)  $x = -2$  的圖形就是與  $x$  軸垂直於  $(-2, 0)$  的直線，如右圖。



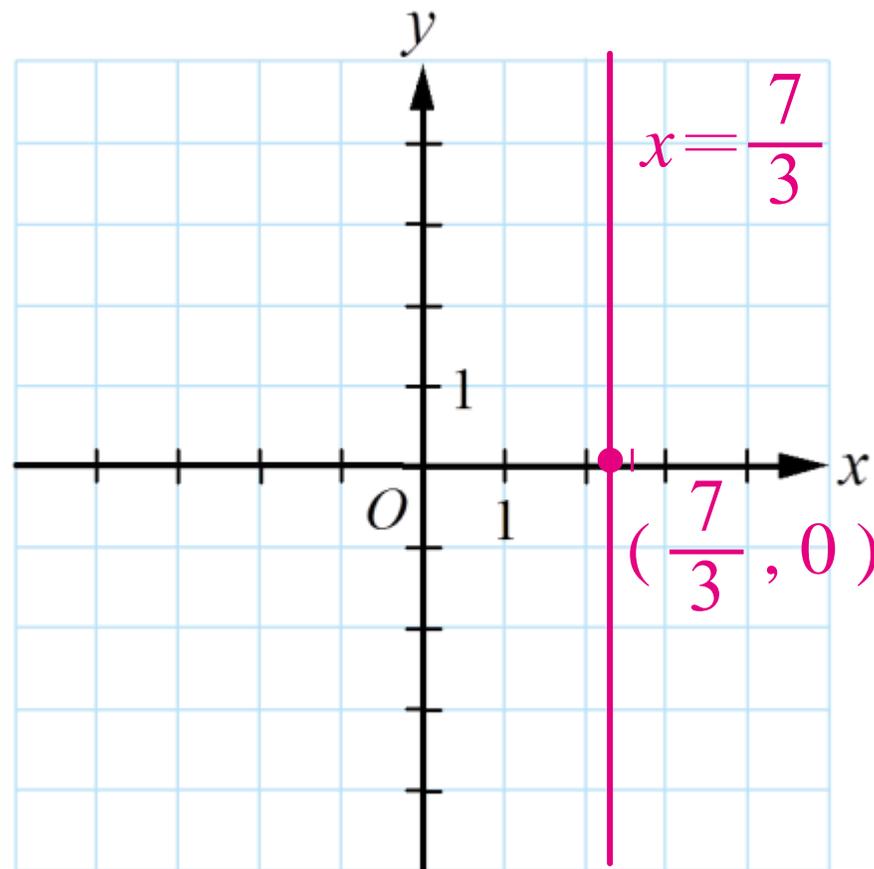


在坐標平面上，畫出下列方程式的圖形。

**解** (1)  $y = \frac{5}{2}$



(2)  $x = \frac{7}{3}$



## 方程式圖形上的點

在前面幾個例題中，給定一個二元一次方程式，它在坐標平面上的圖形就是一條直線。事實上，若一點在方程式圖形上，則此點的  $x$  坐標與  $y$  坐標為方程式的解。我們來看下面的例題。



## 例 6 求過已知一點的二元一次方程式

搭配課本p76

若方程式  $3x + by = -1$  的圖形通過點  $P(2, -1)$ ，則  $b$  的值是多少？

**解**

因為方程式  $3x + by = -1$  的圖形通過點  $P(2, -1)$ ，  
所以  $x=2$ 、 $y=-1$  是方程式  $3x + by = -1$  的解，  
代入得到  $3 \times 2 + b \times (-1) = -1$ ，  
所以  $b=7$ 。





若  $Q(-4, 5)$  在方程式  $ax - 3y = 9$  的圖形上，則  $a$  的值是多少？

**解**

因為  $Q(-4, 5)$  在方程式  $ax - 3y = 9$  的圖形上

所以  $x = -4$ 、 $y = 5$  是方程式  $ax - 3y = 9$  的解

代入得到  $ax(-4) - 3 \times 5 = 9$

所以  $a = -6$



# 例 7 求通過原點的二元一次方程式

搭配課本p77

若方程式  $3x + 4y = c$  的圖形通過原點，則  $c$  的值是多少？

**解**

因為方程式  $3x + 4y = c$  的圖形通過原點  $(0, 0)$ ，  
所以  $x = 0$ 、 $y = 0$  是方程式  $3x + 4y = c$  的解，  
代入得到  $3 \times 0 + 4 \times 0 = c$ ，  
所以  $c = 0$ 。

**Hint**

圖形通過原點，所以將  $(0, 0)$  代入求  $c$ 。

由例 7 可知，若二元一次方程式  $ax + by = c$  的圖形通過原點，則  $c = 0$ 。

判斷下列二元一次方程式的圖形是否會通過原點。

(1)  $y = 3x + 1$

(2)  $2x + y = 0$

**解**

將  $(0, 0)$  代入時

$$0 \neq 3 \times 0 + 1$$

所以  $y = 3x + 1$  的圖形  
不會通過原點

將  $(0, 0)$  代入時

$$2 \times 0 + 0 = 0$$

所以  $2x + y = 0$  的圖形  
會通過原點



給定兩個點，就可以畫出一條直線通過這兩點，那如果給定兩個點的坐標，可以找到對應的方程式嗎？我們來看下面的例題。



若方程式  $ax + by = 2$  的圖形會通過  $A(1, 2)$ 、 $B(-1, -6)$  兩點，則：

- (1) 求  $a$ 、 $b$  之值。
- (2) 若  $(k, 0)$  也在  $ax + by = 2$  的圖形上，求  $k = ?$

**解**

(1) 將  $A(1, 2)$ 、 $B(-1, -6)$  分別代入  $ax + by = 2$ ，

$$\text{得到} \begin{cases} a + 2b = 2 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ -a - 6b = 2 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases},$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得 } -4b = 4, b = -1,$$

將  $b = -1$  代入  $\textcircled{1}$  式，得  $a = 4$ 。



# 例 8 求過已知兩點的二元一次方程式

搭配課本p77

若方程式  $ax + by = 2$  的圖形會通過  $A(1, 2)$ 、 $B(-1, -6)$  兩點，則：

- (1) 求  $a$ 、 $b$  之值。
- (2) 若  $(k, 0)$  也在  $ax + by = 2$  的圖形上，求  $k = ?$

**解**

(2) 因為  $a = 4$ 、 $b = -1$ ，  
所以此方程式為  $4x - y = 2$ ，  
將  $(k, 0)$  代入  $4x - y = 2$  中，  
得  $4k - 0 = 2$ ， $k = \frac{1}{2}$ 。



在例 8(2)中， $4x - y = 2$  也可以表示成  $y = 4x - 2$  或  $x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}$ 。也就是說，當二元一次方程式寫成  $y = ax + b$  或  $x = cy + d$  等形式，圖形也是一條直線。我們也可以利用此形式，求出圖形通過給定兩點的二元一次方程式。



已知下圖為永康國中周圍的坐標平面地圖，若永康國中  $(-4, -1)$ 、介壽公園  $(6, s)$  和東東百貨  $(2, 5)$  的位置恰好都在方程式  $y = ax + b$  的圖形上，則：

- (1) 此方程式為何？
- (2) 求  $s$  的值為多少？

解

(1) 將  $(-4, -1)$ 、 $(2, 5)$  分別代入  $y = ax + b$

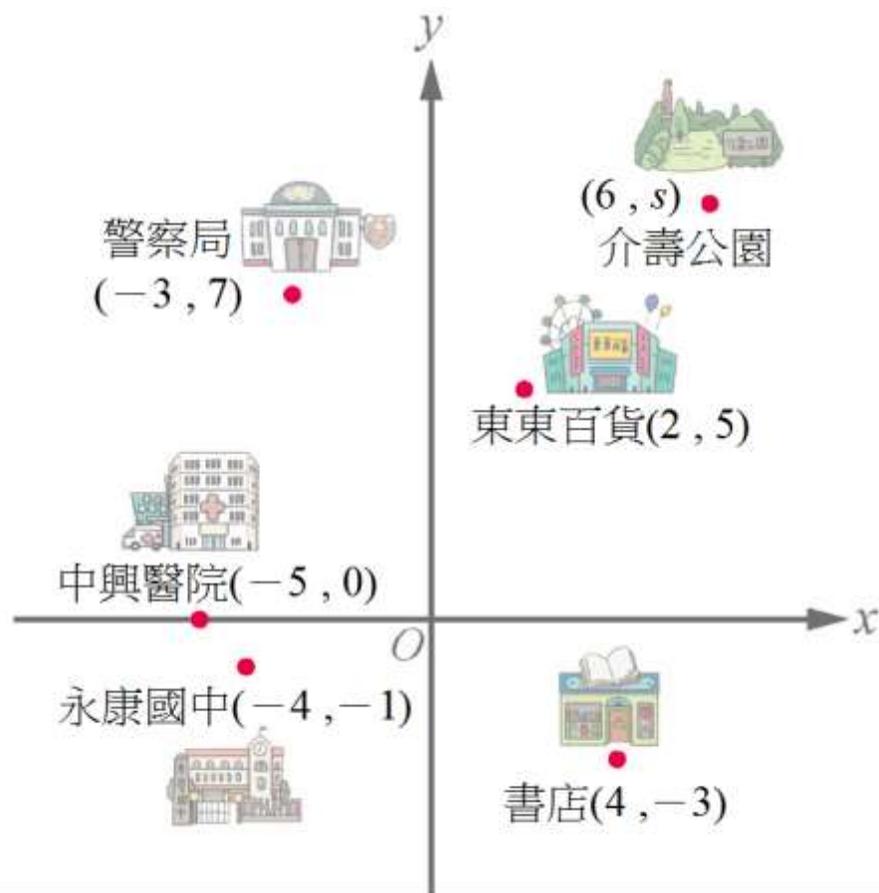
$$\text{得到} \begin{cases} -1 = -4a + b \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 5 = 2a + b \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } -6 = -6a, a = 1$$

將  $a = 1$  代入  $\textcircled{1}$  式

$$\text{得 } -1 = -4 \times 1 + b, b = 3$$

所以此方程式為  $y = x + 3$



已知下圖為永康國中周圍的坐標平面地圖，若永康國中  $(-4, -1)$ 、介壽公園  $(6, s)$  和東東百貨  $(2, 5)$  的位置恰好都在方程式  $y = ax + b$  的圖形上，則：

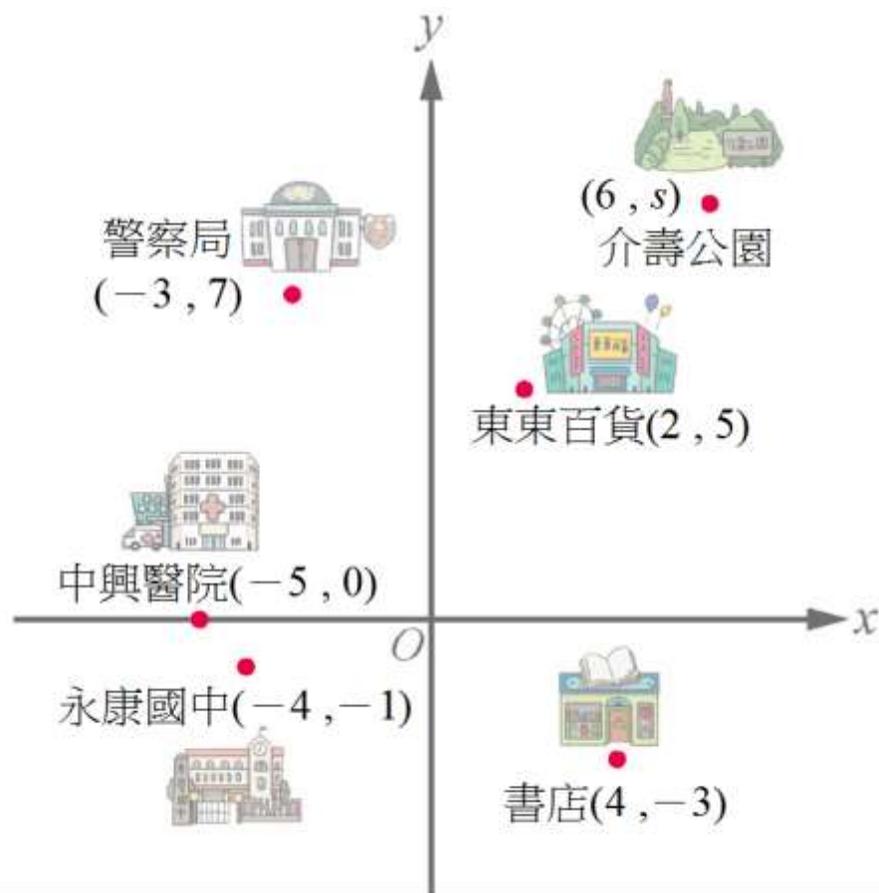
- (1) 此方程式為何？
- (2) 求  $s$  的值為多少？

**解**

(2) 將  $(6, s)$  代入  $y = x + 3$  中

$$\text{得 } s = 6 + 3$$

$$s = 9$$



數

學

好

好

玩

## 遺失的鑰匙

有時遊戲會設有一組暗號，當你根據線索，並經過推敲後，方能找到通關密語並進而破關。請翻到書末 P.[4]「遺失的鑰匙」，根據線索並利用所學的方法在坐標平面上畫出方程式圖形，一起來找出通關密語吧！



## 二元一次聯立方程式的幾何意義

我們學過用代入消去法與加減消去法解二元一次聯立方程式，也討論過二元一次方程式的圖形。如果二元一次聯立方程式有一組解，那此解和這兩個二元一次方程式的圖形有什麼關係呢？

如下圖 6，直線  $L_1$  為二元一次方程式  $x + 3y = 5$  的圖形，  
直線  $L_2$  為二元一次方程式  $2x - y = 3$  的圖形。



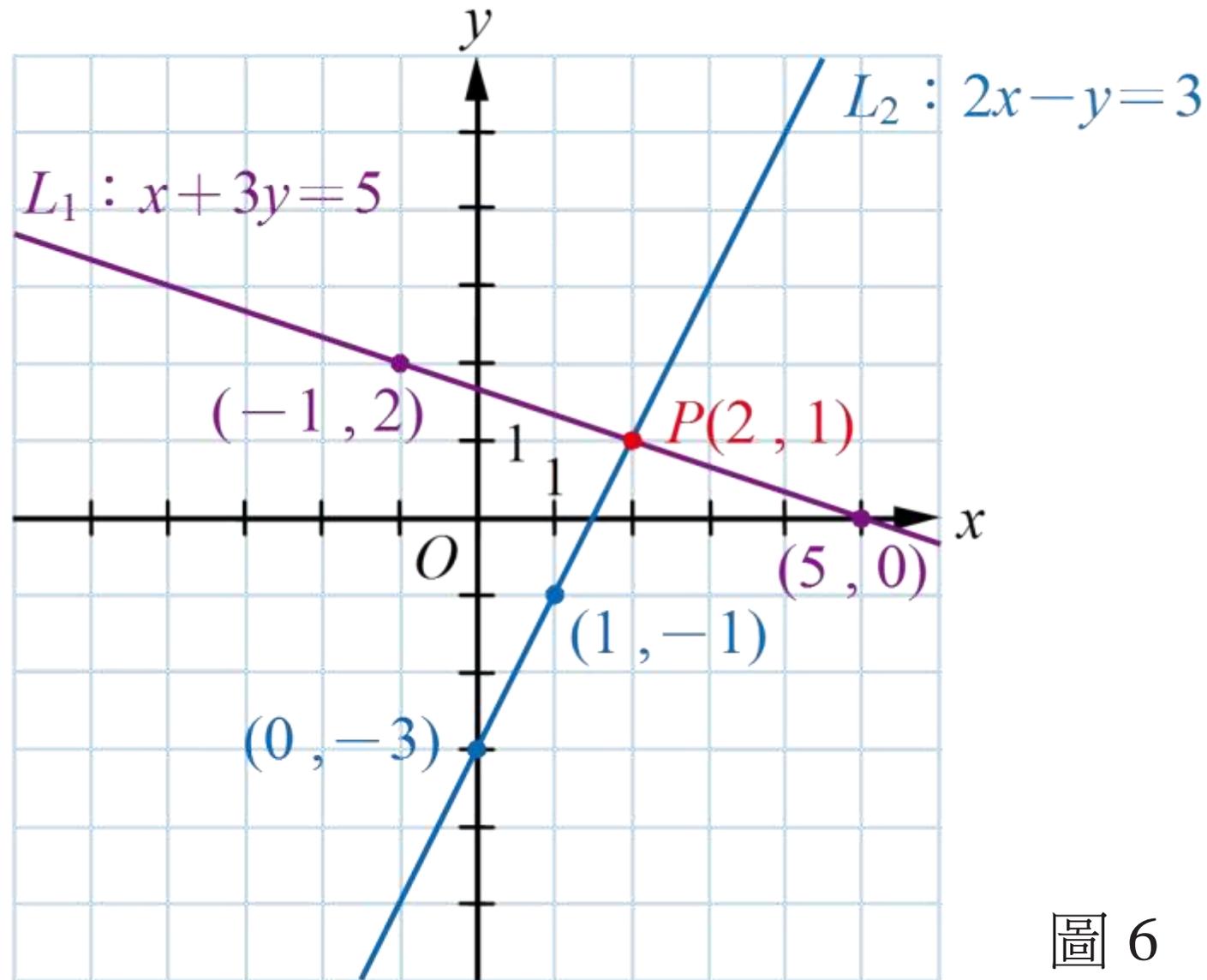


圖 6

由圖中我們可以發現直線  $L_1$  與  $L_2$  相交於一點  $P(2, 1)$ 。

因為  $P(2, 1)$  在  $L_1$  上，所以  $(2, 1)$  是方程式  $x + 3y = 5$  的解；

同樣  $P(2, 1)$  在  $L_2$  上，所以  $(2, 1)$  也是方程式  $2x - y = 3$  的

解，即表示  $(2, 1)$  是聯立方程式  $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$  的解。



事實上，在坐標平面上，兩個二元一次方程式的圖形若相交於一點，則交點坐標就是此二元一次聯立方程式的解；反過來說，二元一次聯立方程式如果有一組解，這組解就是這兩個二元一次方程式圖形的交點坐標。

### 圖解筆記

二元一次聯立方程式的圖形

聯立方程式的解



兩直線的交點坐標



# 例 9 求兩個二元一次方程式圖形的交點坐標

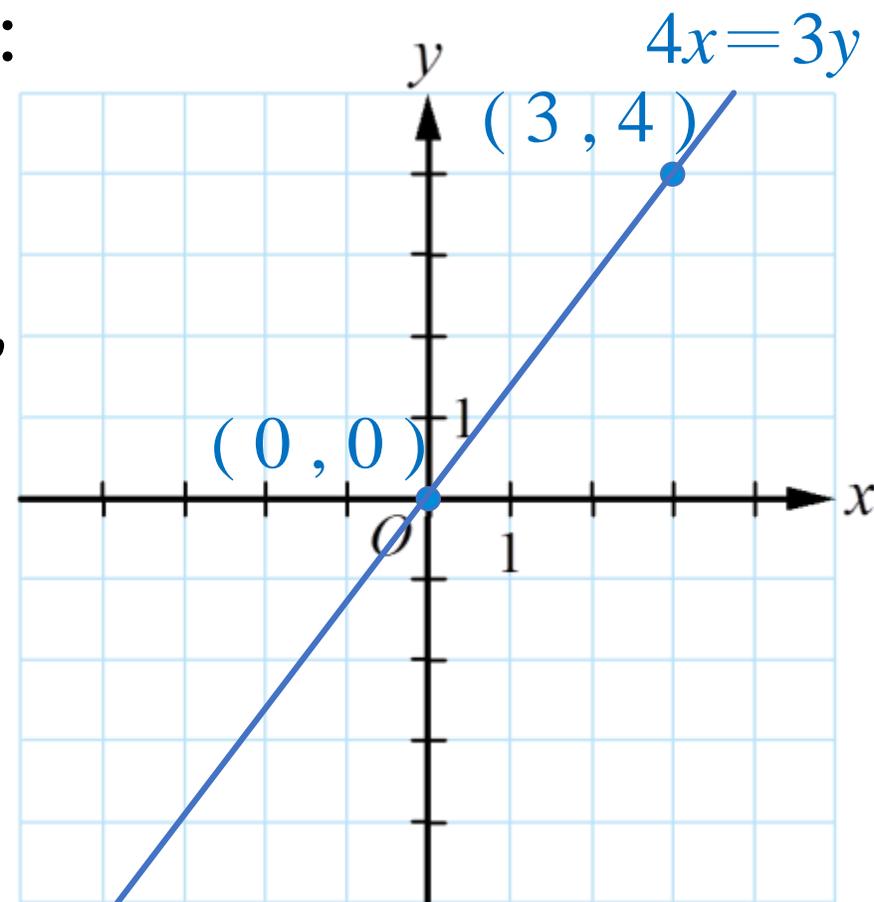
搭配課本p80

在坐標平面上分別畫出二元一次方程式  $4x=3y$ 、 $x+3y=10$  的圖形，並標記這兩條直線的交點坐標。

**解** (1) ① 找出方程式  $4x=3y$  的兩組解：

$x$	0	3
$y$	0	4

通過  $(0, 0)$ 、 $(3, 4)$  的直線，  
即為方程式  $4x=3y$  的圖形。



# 例 9 求兩個二元一次方程式圖形的交點坐標

搭配課本p80

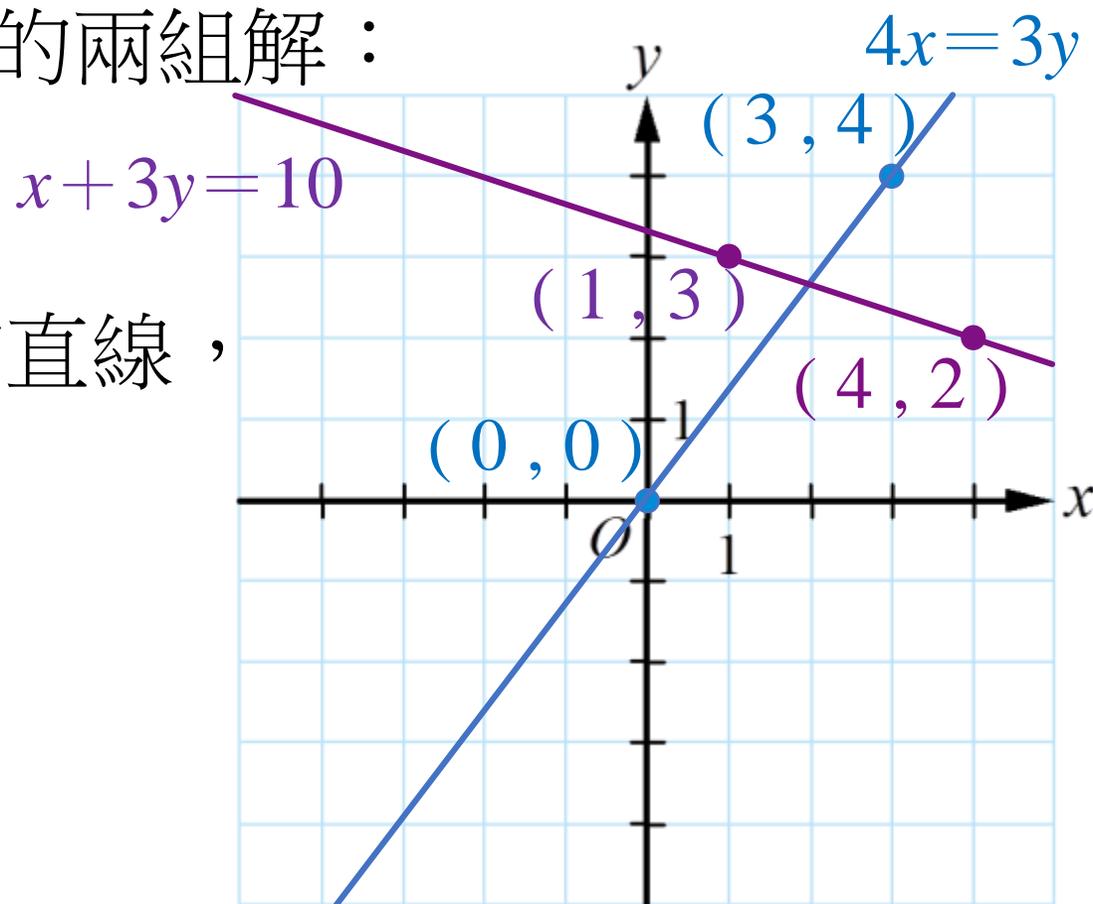
在坐標平面上分別畫出二元一次方程式  $4x=3y$ 、 $x+3y=10$  的圖形，並標記這兩條直線的交點坐標。

**解**

(1) ② 找出方程式  $x+3y=10$  的兩組解：

$x$	1	4
$y$	3	2

通過  $(1, 3)$ 、 $(4, 2)$  的直線，  
即為方程式  $x+3y=10$  的圖形。



# 例 9 求兩個二元一次方程式圖形的交點坐標

搭配課本p80

在坐標平面上分別畫出二元一次方程式  $4x=3y$ 、 $x+3y=10$  的圖形，並標記這兩條直線的交點坐標。

**解**

(2) 解聯立方程式

$$\begin{cases} 4x=3y & \dots\dots ① \\ x+3y=10 & \dots\dots ② \end{cases},$$

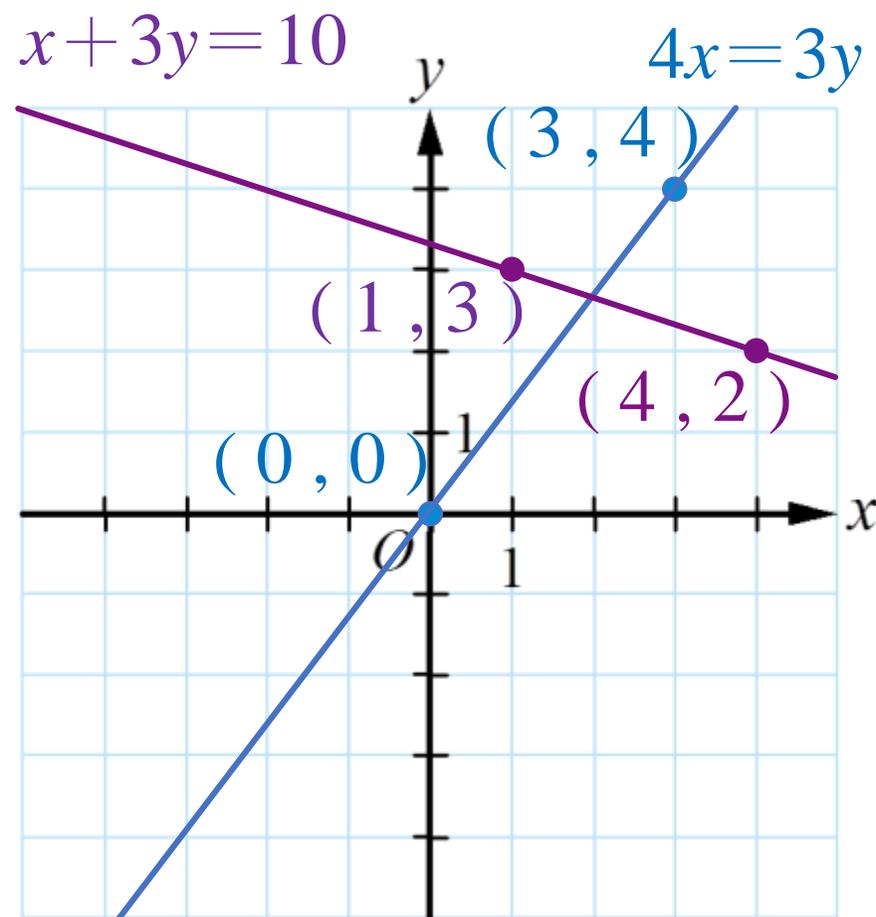
由①得  $4x-3y=0$ .....③，

②+③得  $5x=10$ ， $x=2$ ，

將  $x=2$  代入①，得  $y=\frac{8}{3}$ ，

所以此聯立方程式的解為

$$x=2、y=\frac{8}{3}。$$



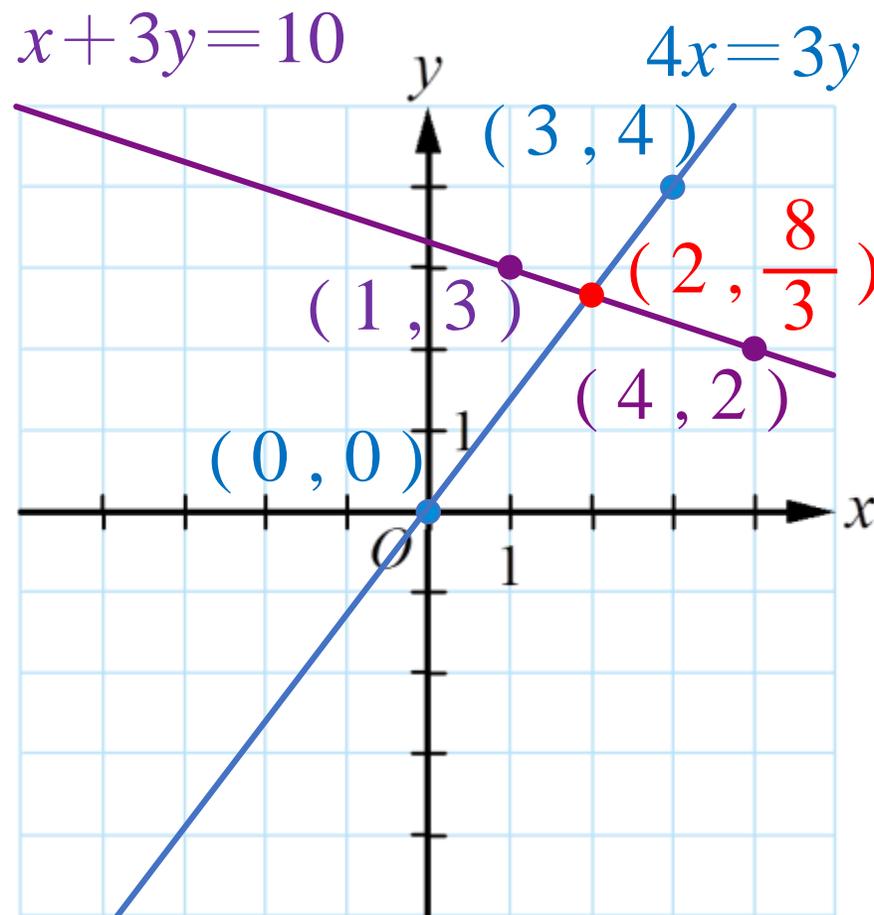
# 例 9 求兩個二元一次方程式圖形的交點坐標

搭配課本p80

在坐標平面上分別畫出二元一次方程式  $4x=3y$ 、 $x+3y=10$  的圖形，並標記這兩條直線的交點坐標。

**解**

由圖可知，兩直線會交於一點，而交點坐標就是聯立方程式的解，也就是兩直線的交點坐標為  $(2, \frac{8}{3})$ 。





在坐標平面上分別畫出二元一次方程式  $y = -x + 6$ 、 $x + 2y = 8$  的圖形，並標記這兩條直線的交點坐標。

**解**

(1)  $y = -x + 6$

$x$	$0$	$6$
$y$	$6$	$0$

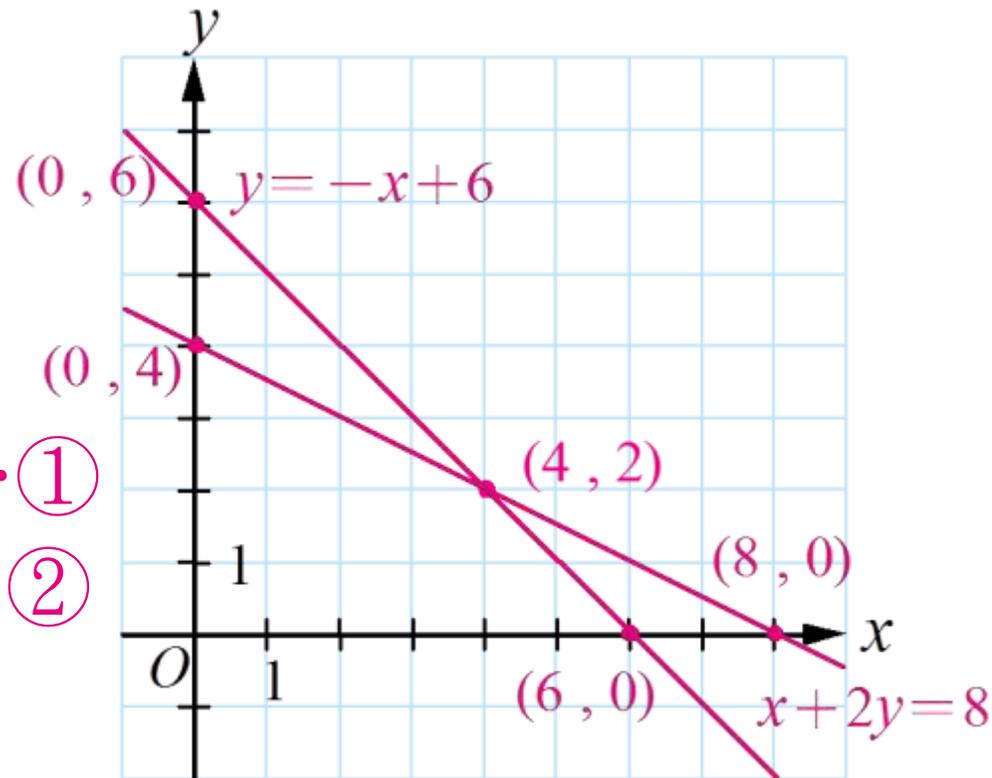
$x + 2y = 8$

$x$	$0$	$8$
$y$	$4$	$0$

(2) 解聯立方程式  $\begin{cases} y = -x + 6 \dots\dots ① \\ x + 2y = 8 \dots\dots ② \end{cases}$

可得  $x = 4$ 、 $y = 2$ ，

即交點坐標為  $(4, 2)$



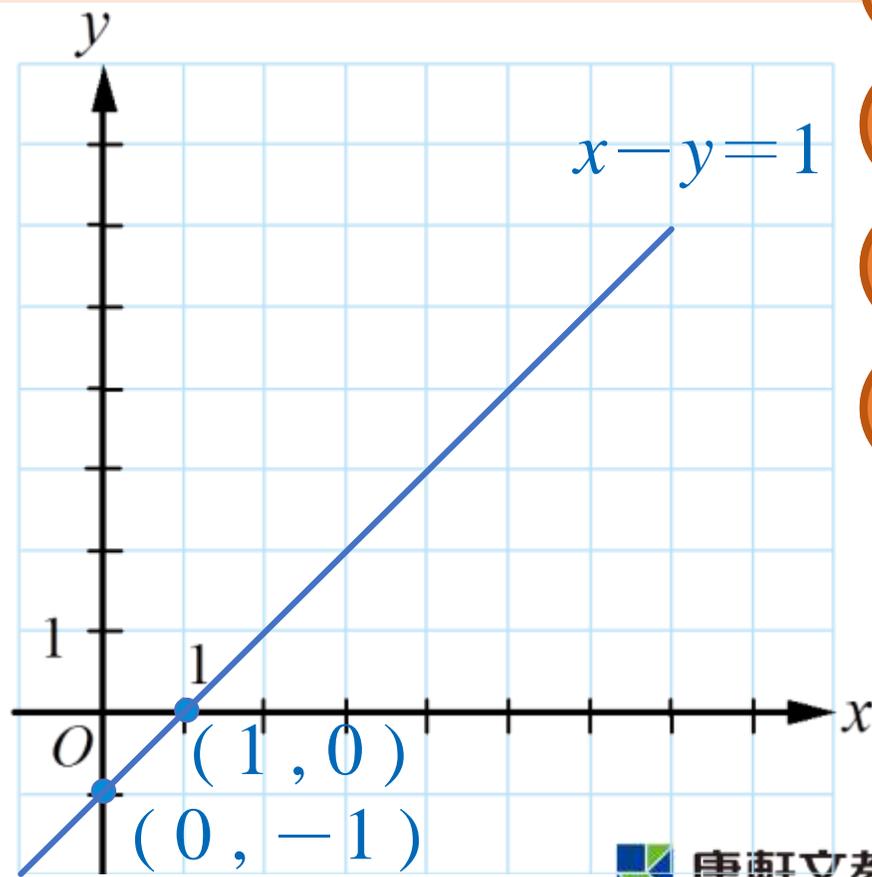
在坐標平面上畫出二元一次方程式  $x - y = 1$ 、 $3x + 4y = 24$  的圖形，並求出這兩個二元一次方程式的圖形與  $x$  軸所圍成的區域面積。

**解**

(1) ① 找出方程式  $x - y = 1$  的兩組解：

$x$	1	0
$y$	0	-1

畫出通過  $(1, 0)$ 、 $(0, -1)$  的直線。



# 例 10 二元一次聯立方程式圖形的應用

搭配課本p81

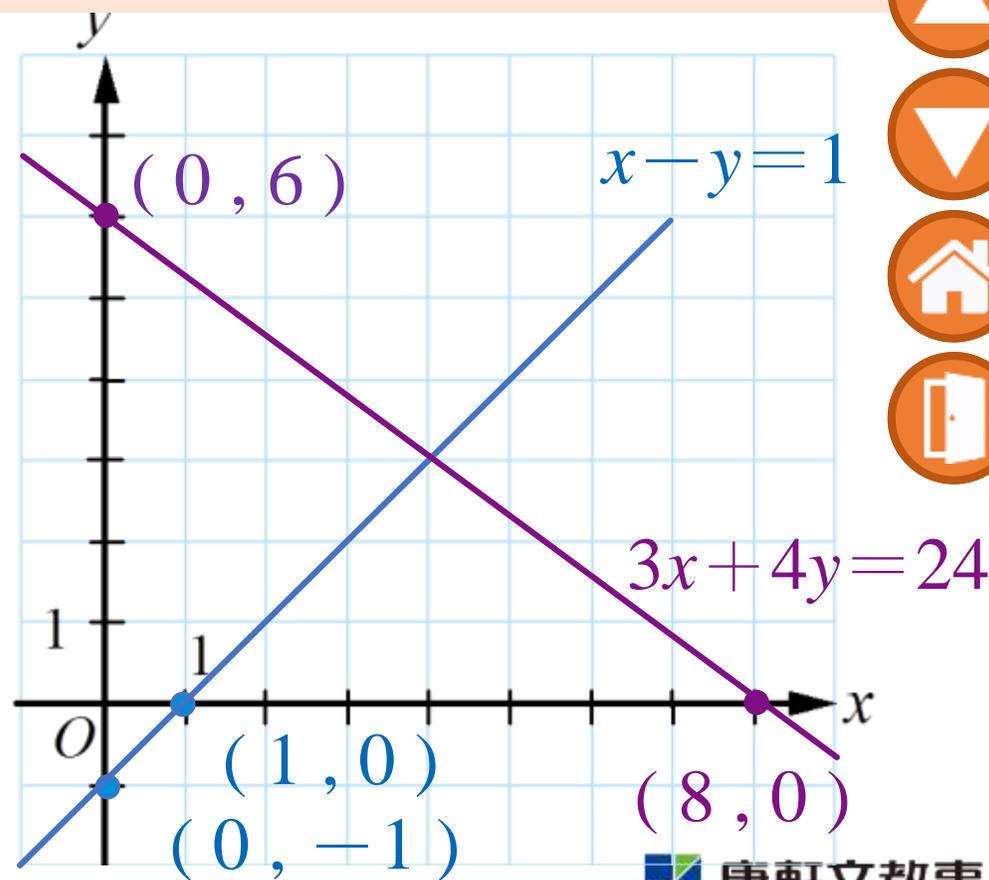
在坐標平面上畫出二元一次方程式  $x - y = 1$ 、 $3x + 4y = 24$  的圖形，並求出這兩個二元一次方程式的圖形與  $x$  軸所圍成的區域面積。

**解** (1) ② 找出方程式  $3x + 4y = 24$  的兩

組解：

$x$	8	0
$y$	0	6

畫出通過  $(8, 0)$ 、 $(0, 6)$  的直線。

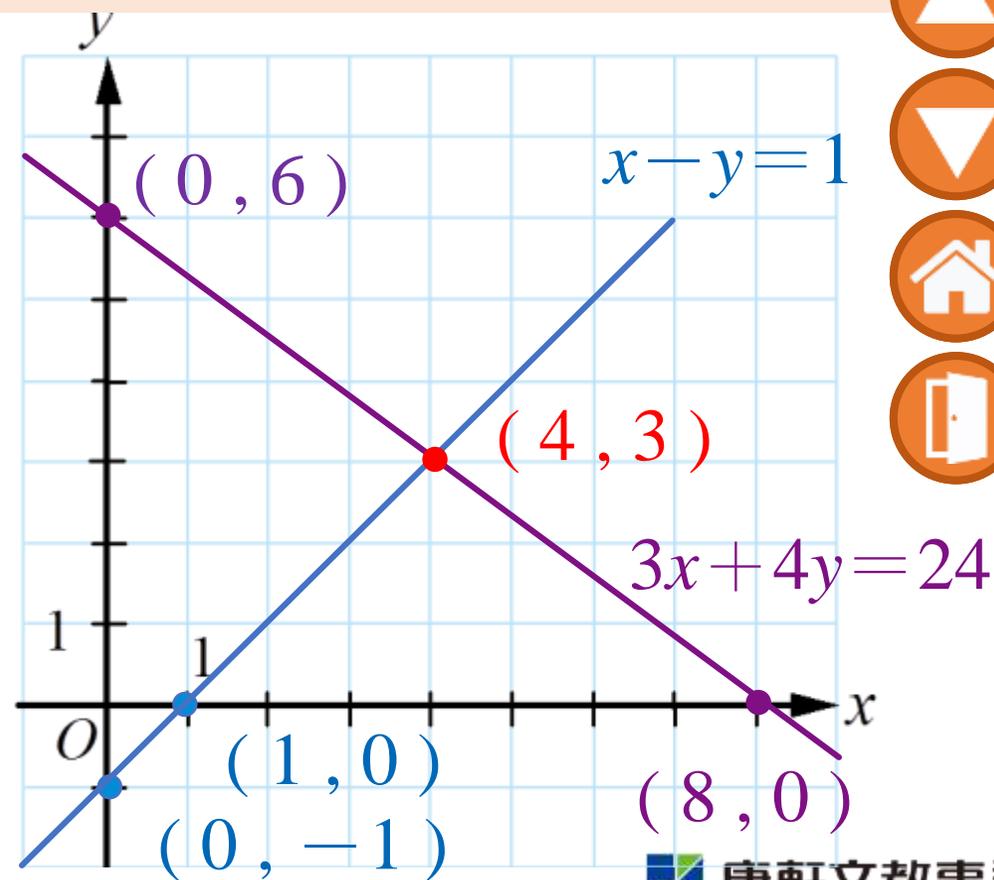


在坐標平面上畫出二元一次方程式  $x - y = 1$ 、 $3x + 4y = 24$  的圖形，並求出這兩個二元一次方程式的圖形與  $x$  軸所圍成的區域面積。

**解** (2) 解聯立方程式

$$\begin{cases} x - y = 1 & \dots\dots ① \\ 3x + 4y = 24 & \dots\dots ② \end{cases},$$

由① $\times 4$  得  $4x - 4y = 4 \dots\dots ③$ ，  
 ② $+$ ③得  $7x = 28$ ， $x = 4$ ，將  $x = 4$  代入①，得  $y = 3$ ，  
 所以此聯立方程式的解為  $x = 4$ 、 $y = 3$ 。  
 故兩直線的交點為  $(4, 3)$ 。



## 例 10 二元一次聯立方程式圖形的應用

搭配課本p81

在坐標平面上畫出二元一次方程式  $x - y = 1$ 、 $3x + 4y = 24$  的圖形，並求出這兩個二元一次方程式的圖形與  $x$  軸所圍成的區域面積。

**解** (3) 此圖形與  $x$  軸圍成一個底為  $8 - 1 = 7$ 、高為 3 的三角形。

$$\text{故區域面積} = \frac{1}{2} \times 7 \times 3 = \frac{21}{2}。$$



承例10，求出二元一次方程式  $x - y = 1$ 、 $3x + 4y = 24$  的圖形與  $y$  軸所圍成的區域面積。

**解**

此圖形與  $y$  軸圍成一個底為  $6 - (-1) = 7$ 、高為 4 的三角形  
故區域面積  $= \frac{1}{2} \times 7 \times 4 = 14$



## 1 二元一次方程式的圖形

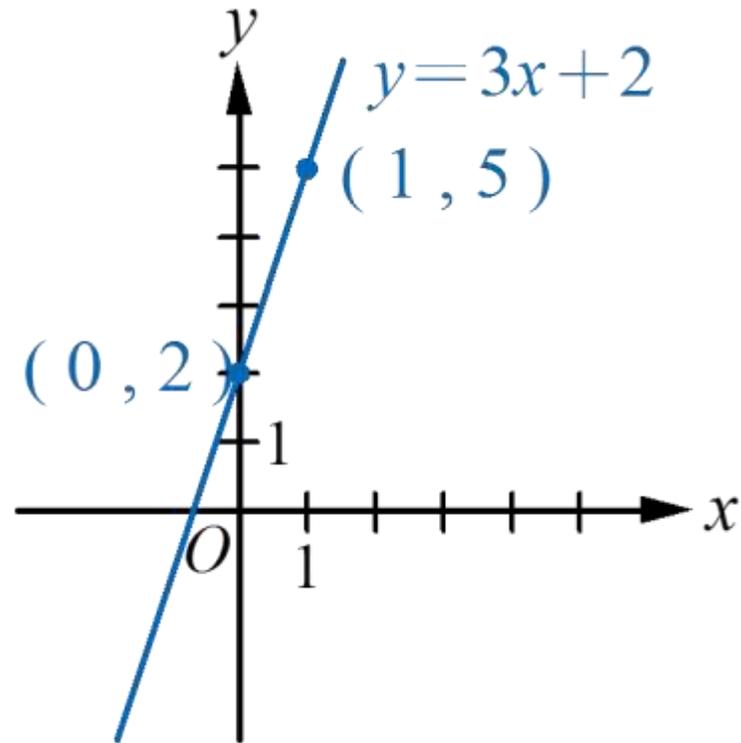
- (1) 每個二元一次方程式的圖形都是一條直線。
- (2) 找出二元一次方程式的兩組解，把它們描在坐標平面上，通過這兩點的直線就是這個二元一次方程式的圖形。



# 1 二元一次方程式的圖形

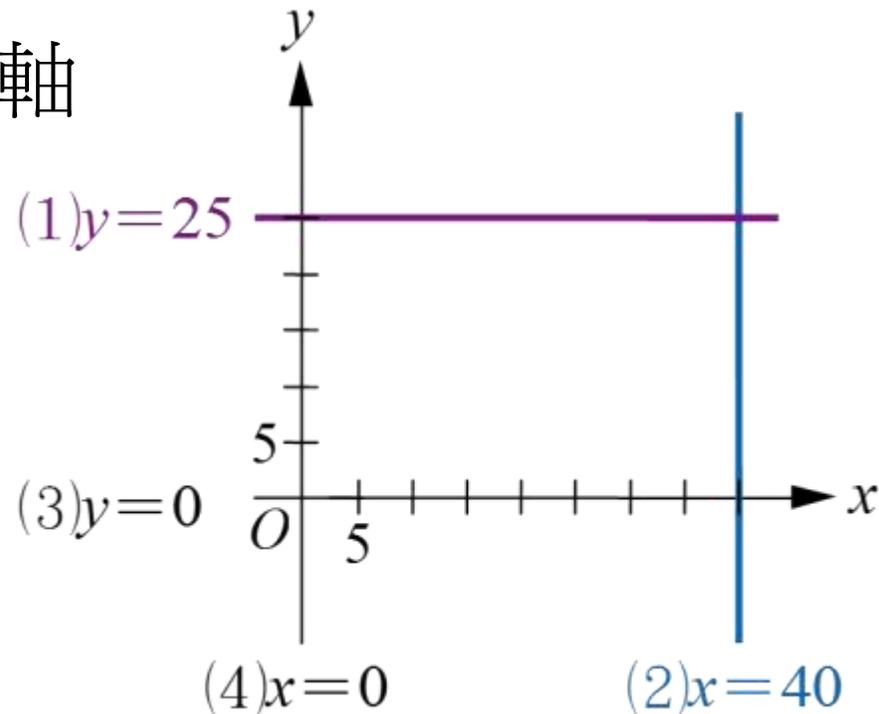
例 在坐標平面上畫出二元一次方程式  $y=3x+2$  的圖形：

$x$	0	1
$y$	2	5



## 2 坐標平面上 $y=m$ 與 $x=n$ 的圖形

- (1) 方程式  $y=m$  的圖形是一條與  $y$  軸垂直於  $(0, m)$  的直線
- (2) 方程式  $x=n$  的圖形是一條與  $x$  軸垂直於  $(n, 0)$  的直線。
- (3) 方程式  $y=0$  的圖形就是  $x$  軸。
- (4) 方程式  $x=0$  的圖形就是  $y$  軸。

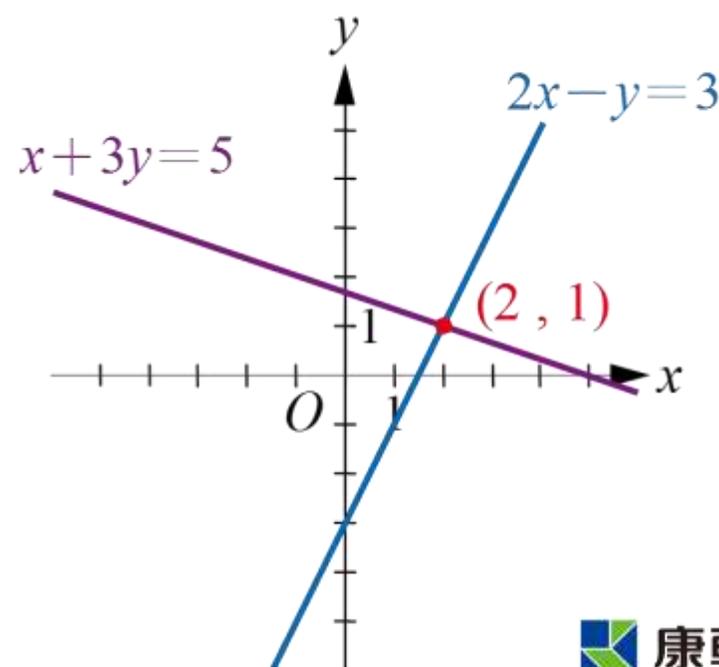


### 3 二元一次聯立方程式的幾何意義

坐標平面上，兩個二元一次方程式的圖形若交於一點，則交點坐標就是此二元一次聯立方程式的解。

**例** 二元一次方程式  $x + 3y = 5$ 、 $2x - y = 3$  的圖形相交於一點  $(2, 1)$ ，即此聯立方程式

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \text{ 的解為 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}。$$

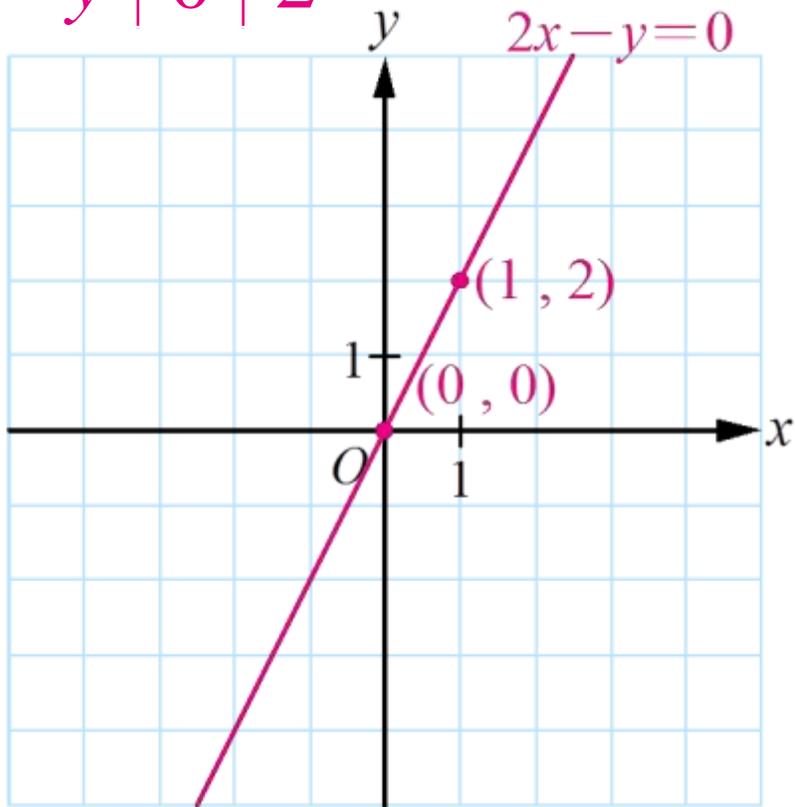


1 在坐標平面上，畫出下列各方程式的圖形。

解

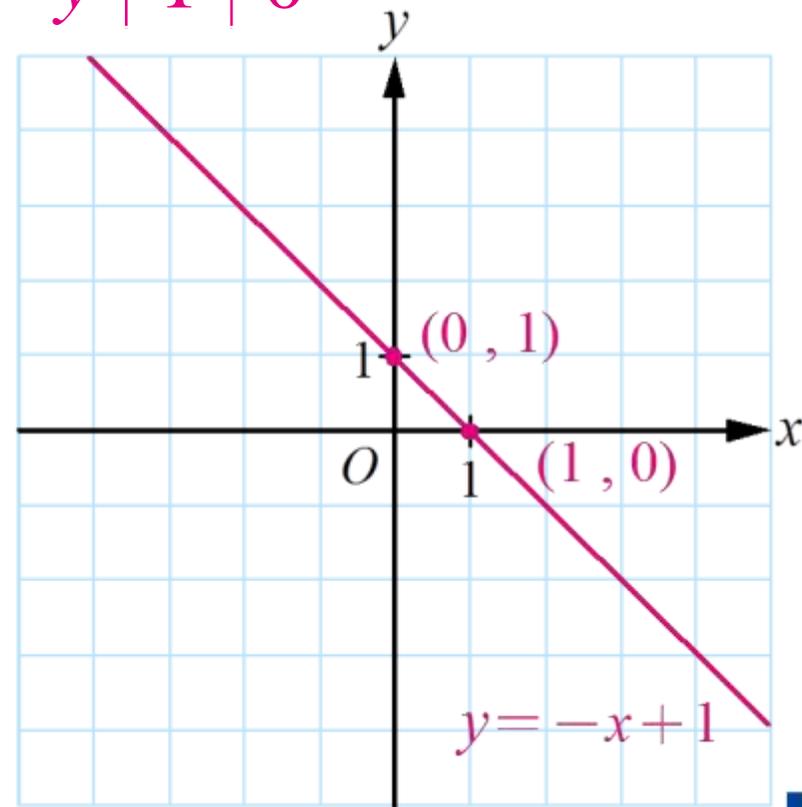
(1)  $2x - y = 0$

$x$	0	1
$y$	0	2



(2)  $y = -x + 1$

$x$	0	1
$y$	1	0

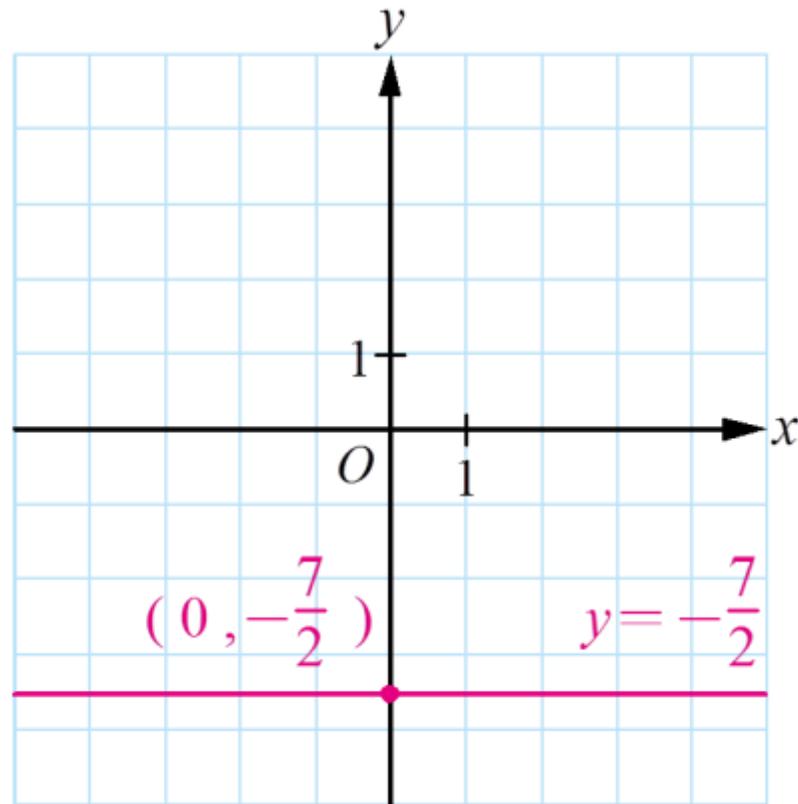


1 在坐標平面上，畫出下列各方程式的圖形。

解

$$(3) y = -\frac{7}{2}$$

$y = -\frac{7}{2}$  的圖形就是與  $y$  軸  
垂直於  $(0, -\frac{7}{2})$  的直線

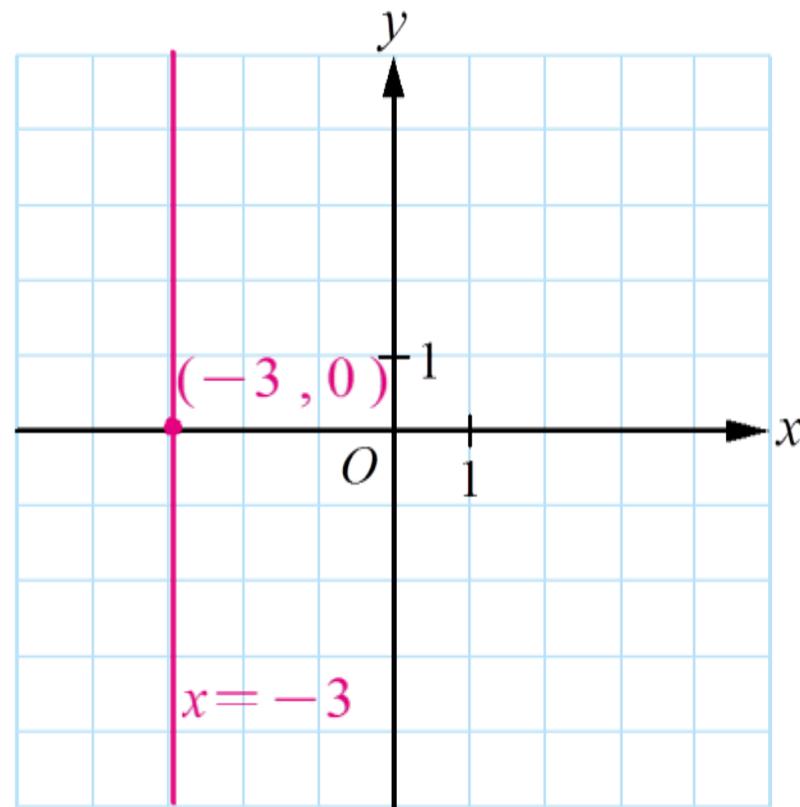


1 在坐標平面上，畫出下列各方程式的圖形。

解

(4)  $x = -3$

$x = -3$  的圖形就是與  $x$  軸  
垂直於  $(-3, 0)$  的直線



2 若方程式  $\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 1$  的圖形通過  $(m, 0)$ 、 $(0, n)$ ，  
則  $m$ 、 $n$  的值分別為何？

**解**

將  $(m, 0)$  及  $(0, n)$  分別代入方程式  $\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 1$

$$\text{得} \begin{cases} \frac{m}{5} = 1 & \dots\dots \textcircled{1} \\ -\frac{n}{4} = 1 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases},$$

所以  $m=5$ 、 $n=-4$



3 判斷下列哪一個二元一次方程式的圖形不會通過原點。

(A)  $x - 2y = 0$     (B)  $y = x$     (C)  $-x + 3y = 11$

解

答： (C) 。

(A) 將  $(0, 0)$  代入時， $0 - 2 \times 0 = 0$ ，  
所以  $x - 2y = 0$  的圖形會通過原點

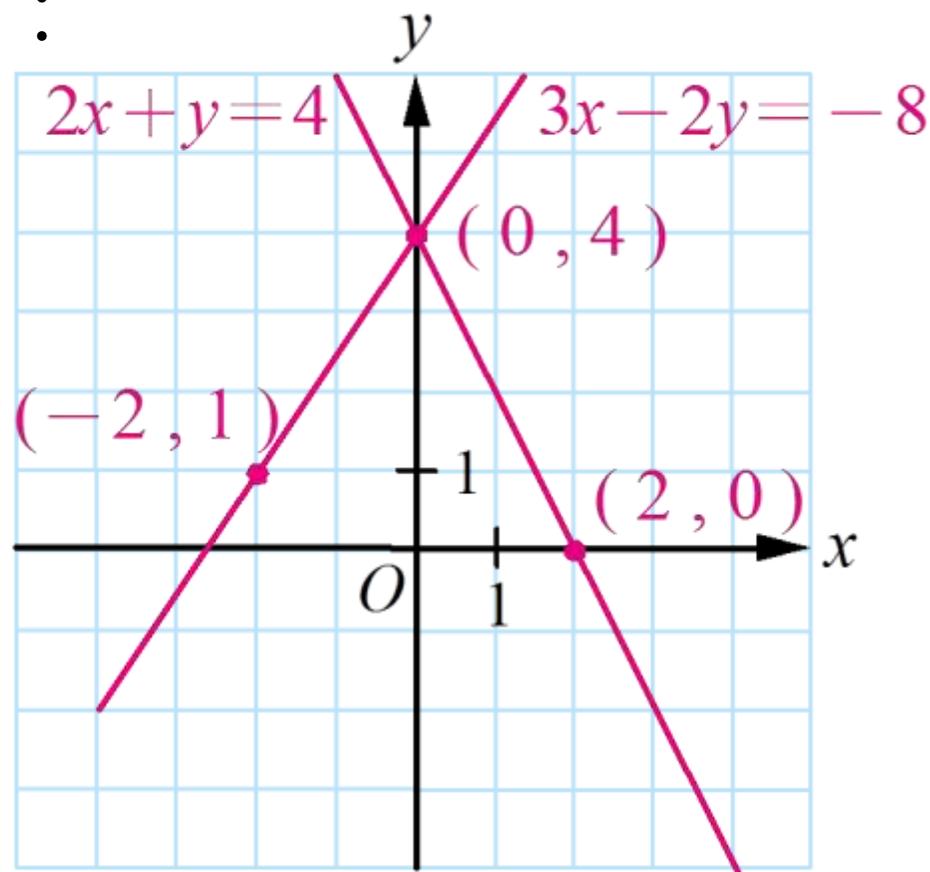
(B) 將  $(0, 0)$  代入時， $0 = 0$ ，  
所以  $y = x$  的圖形會通過原點

(C) 將  $(0, 0)$  代入時， $0 + 3 \times 0 \neq 11$ ，  
所以  $-x + 3y = 11$  的圖形不會通過原點



4 在坐標平面上分別畫出二元一次方程式  $3x - 2y = -8$ 、 $2x + y = 4$  的圖形，若兩個方程式圖形的交點為  $A$ ，與  $x$  軸的交點分別為  $B$ 、 $C$  兩點，則：

- (1) 求  $A$  點的坐標。
- (2) 求  $\triangle ABC$  的面積。



解

$$3x - 2y = -8 \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & -2 \\ \hline y & 4 & 1 \end{array}$$

$$2x + y = 4 \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$$

4 在坐標平面上分別畫出二元一次方程式  $3x - 2y = -8$ 、 $2x + y = 4$  的圖形，若兩個方程式圖形的交點為  $A$ ，與  $x$  軸的交點分別為  $B$ 、 $C$  兩點，則：

(1) 求  $A$  點的坐標。

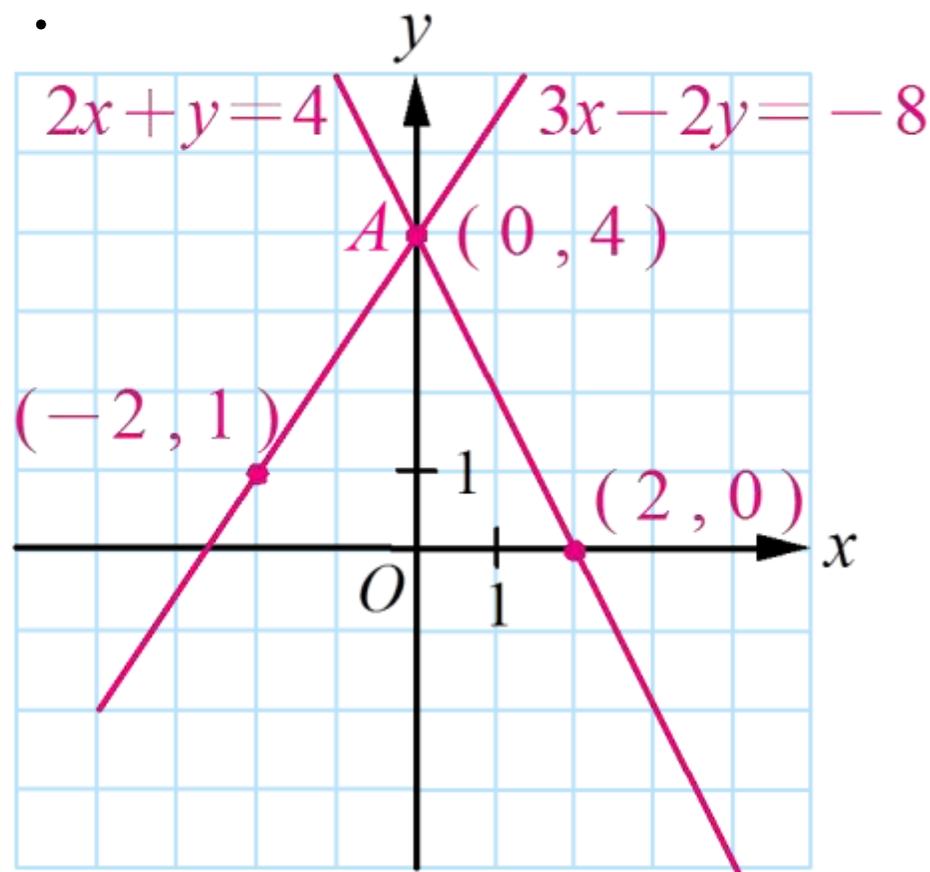
解

(1) 解二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} 3x - 2y = -8 \\ 2x + y = 4 \end{cases},$$

得  $x = 0$ 、 $y = 4$

所以交點坐標為  $A(0, 4)$



- 4 在坐標平面上分別畫出二元一次方程式  $3x - 2y = -8$ 、 $2x + y = 4$  的圖形，若兩個方程式圖形的交點為  $A$ ，與  $x$  軸的交點分別為  $B$ 、 $C$  兩點，則：
- (2) 求  $\triangle ABC$  的面積。

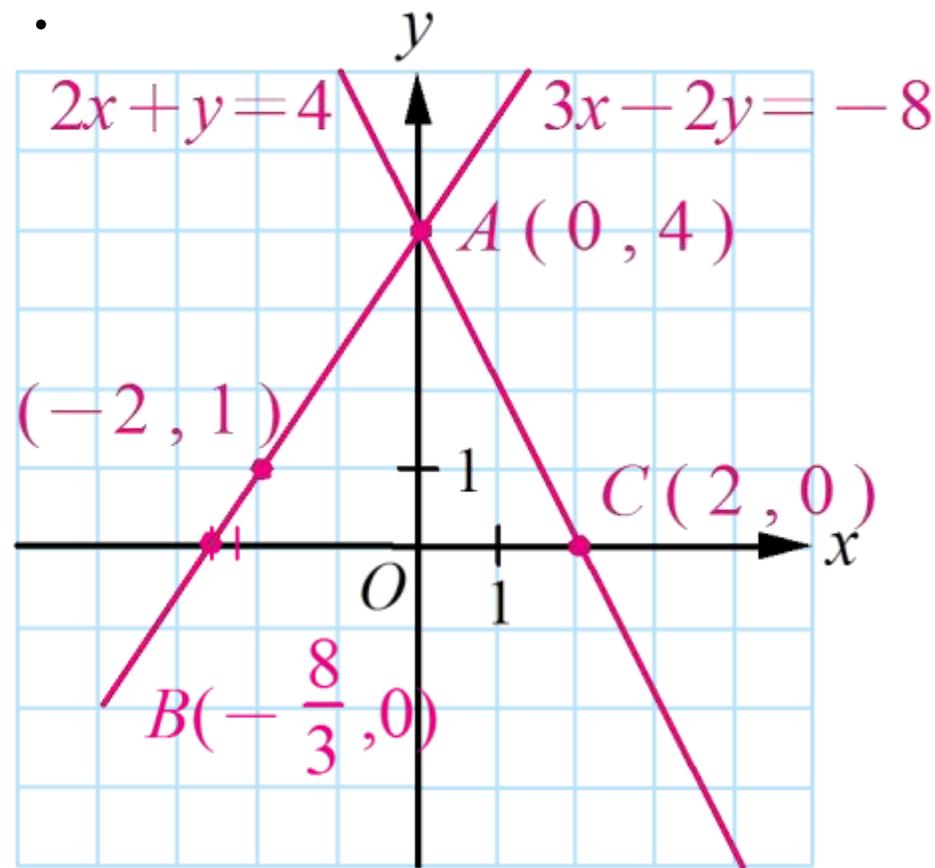
**解** (2) 將  $y=0$  代入  $3x - 2y = -8$ ，

得  $B(-\frac{8}{3}, 0)$

將  $y=0$  代入  $2x + y = 4$ ，  
得  $C(2, 0)$ ，

所以  $\overline{BC} = 2 - (-\frac{8}{3}) = \frac{14}{3}$

故  $\triangle ABC$  面積  $= \frac{1}{2} \times \frac{14}{3} \times 4 = \frac{28}{3}$



挑錯題

小妍、小翊和小美對於「方程式  $x=5$ 、 $y=2$ 、 $y=x-5$  在坐標平面上的圖形」說法如下。判斷他們的說法是否正確，並說明你的理由。

$x=5$  在坐標平面上的圖形是一個點。



小妍

$y=2$  在坐標平面上的圖形是一條平行  $y$  軸的直線。



小翊

聯立方程式  $\begin{cases} x=5 \\ y=x-5 \end{cases}$  的解為  $(5, 0)$ ，所以  $x=5$ 、 $y=x-5$  在坐標平面上圖形的交點在  $x$  軸上。



小美



挑錯題

小妍：正確；錯誤，

理由： $x=5$  在坐標平面上的圖形是一條垂直  $x$  軸的直線

小翊：正確；錯誤，

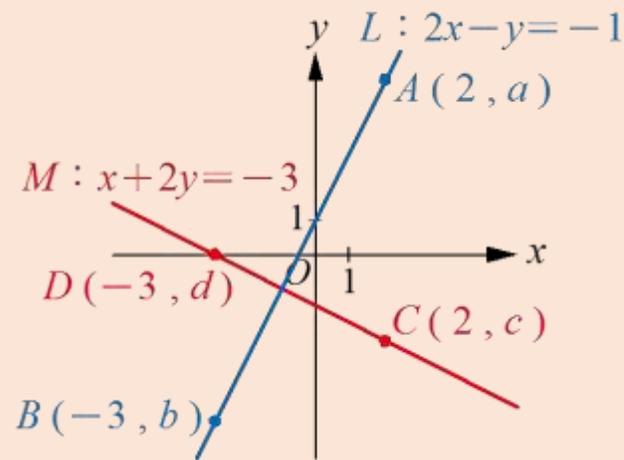
理由： $y=2$  在坐標平面上的圖形是一條垂直  $y$  軸的直線

小美：正確；錯誤，

理由：

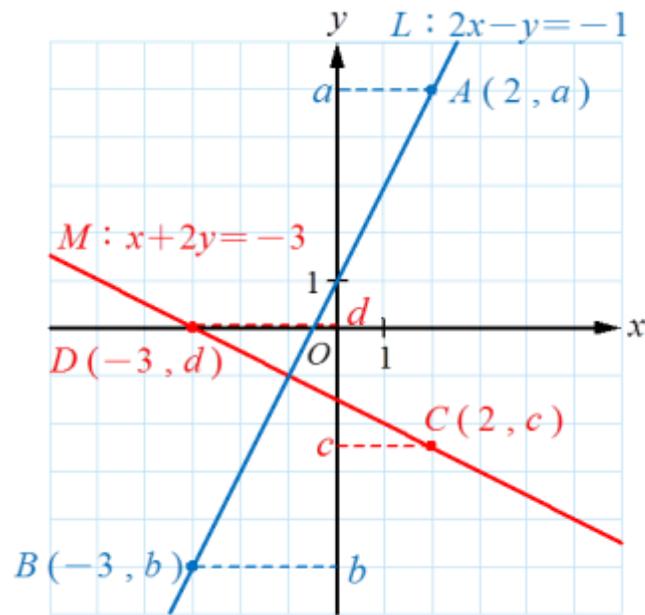


如右圖，已知二元一次方程式  $2x - y = -1$ 、 $x + 2y = -3$  在坐標平面上的圖形分別為直線  $L$  與直線  $M$ 。若  $A(2, a)$ 、 $B(-3, b)$  在直線  $L$  上， $C(2, c)$ 、 $D(-3, d)$  在直線  $M$  上，則  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  的大小關係為何？

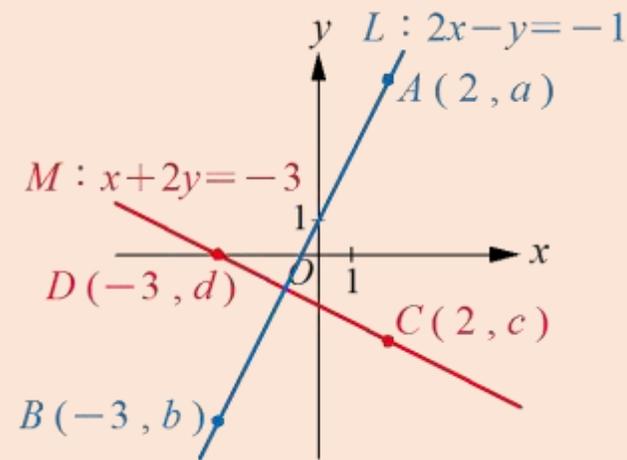


圖解

在坐標平面上，畫出分別通過  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四點的水平線，觀察  $y$  軸上的交點，可知  $a > d > c > b$ 。



如右圖，已知二元一次方程式  $2x - y = -1$ 、 $x + 2y = -3$  在坐標平面上的圖形分別為直線  $L$  與直線  $M$ 。若  $A(2, a)$ 、 $B(-3, b)$  在直線  $L$  上， $C(2, c)$ 、 $D(-3, d)$  在直線  $M$  上，則  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  的大小關係為何？



將各點坐標分別代入方程式，求出  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  的值

將  $A(2, a)$ 、 $B(-3, b)$  代入  $2x - y = -1$  中，  
解方程式可得  $a = 5$ 、 $b = -5$ ，

將  $C(2, c)$ 、 $D(-3, d)$  代入  $x + 2y = -3$  中，

解方程式可得  $c = -\frac{5}{2}$ 、 $d = 0$ ，因此  $a > d > c > b$ 。



# 遨遊坐標世界

坐標平面的概念源於 17 世紀法國數學家笛卡兒，但當時他的兩個坐標軸未必互相垂直，直到後來才演變為以互相垂直的兩條數線做為坐標軸，並且形成直角坐標平面，讓每一個點在平面上有一個位置。

事實上，一條數線可以牽拉出一維空間；兩條數線可以鋪陳出二維空間；三條數線可以構築出三維空間，而在數學家的腦海中更有四維、五維等多維度的空間。讓我們帶著「坐標軸線」的概念，來遨遊這美麗世界！

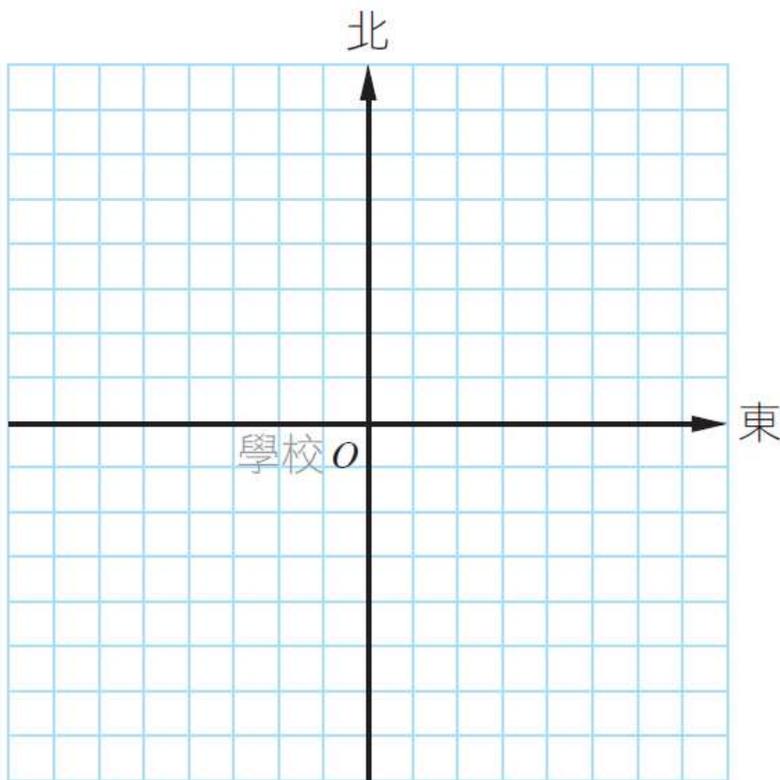




Q

以自己的學校為原點，在坐標平面上依據方位和距離，至少標畫出五個鄰近地標（如商店、醫院、郵局、市場、警察局等）的大概位置。

略



學完囉！  
前往 ➡ 下一章節

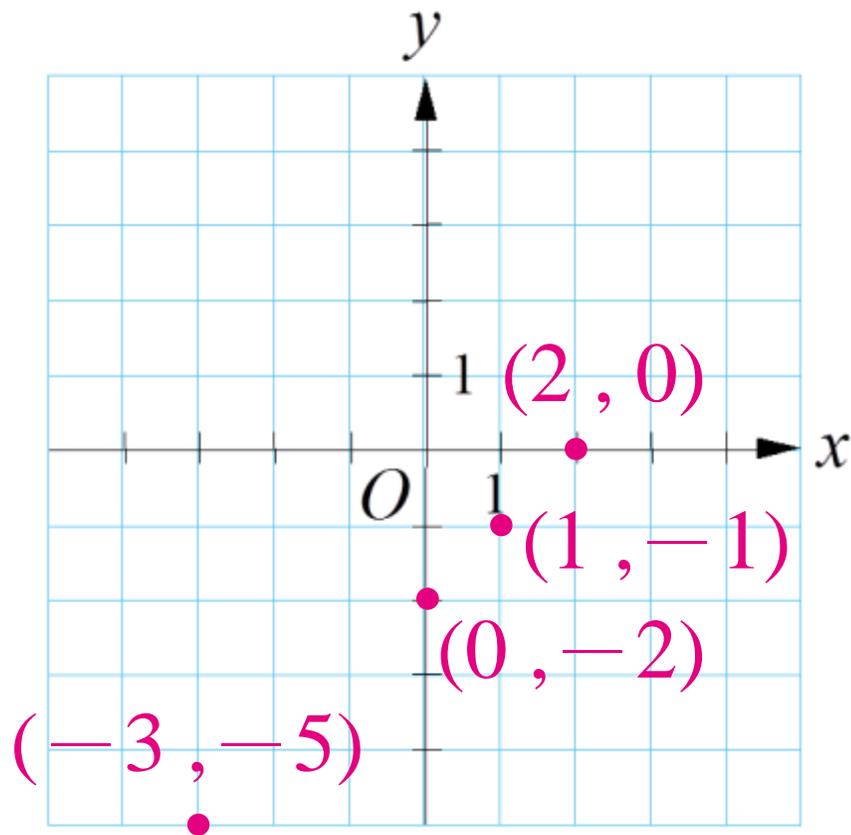
高  
分  
生  
7  
B8643  
HC46

在下面的空格中填入適當的  $x$  值或  $y$  值，使每一數對都是方程式  $y = x - 2$  的解，並將它們描到坐標平面上。

解

$x$	2	1	0	-3
$y$	0	-1	-2	-5

如右圖



回答下列問題：

- (1) 找出方程式  $y = \frac{1}{2}x$  的兩組解，描在坐標平面上，並畫一條直線通過這兩點。
- (2) 再找出五組解，這五組解是否都會在直線  $y = \frac{1}{2}x$  上？

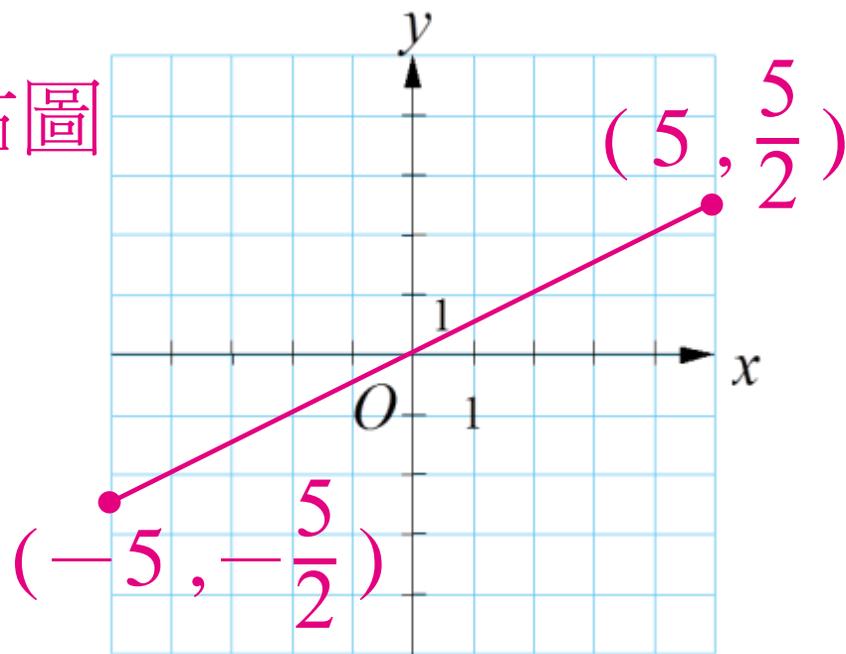


**解**

(1) 兩組解  $(5, \frac{5}{2})$  和  $(-5, -\frac{5}{2})$ ，如右圖

(2)	$x$	$-4$	$-2$	$0$	$2$	$4$
	$y$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$

是【答案僅供參考】

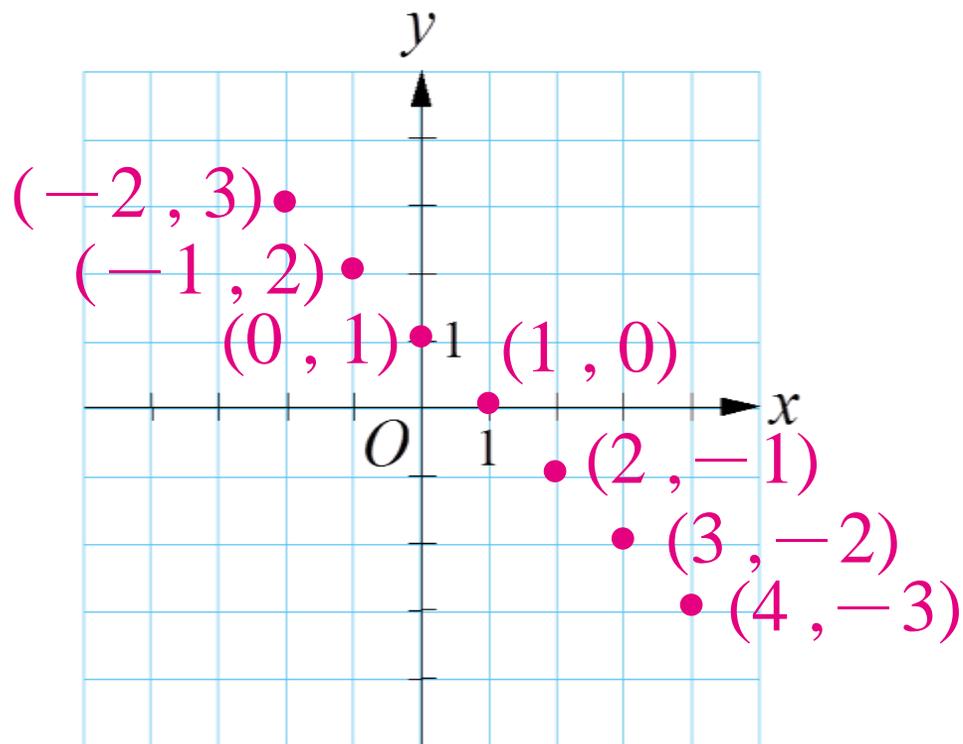


在下面空格中填入適當的  $x$  值或  $y$  值，使每一組數對皆為方程式  $y = -x + 1$  的解，並將它們描到坐標平面上。

解

$x$	4	3	2	1	0	-1	-2
$y$	-3	-2	-1	0	1	2	3

如右圖



回答下列問題：

(1) 找出方程式  $y = \frac{1}{2}x + 1$  的兩組解，描在坐標平面上，並畫一條直線通過這兩點。

(2) 再找出五組解，這五組解是否都會在直線  $y = \frac{1}{2}x + 1$  上？

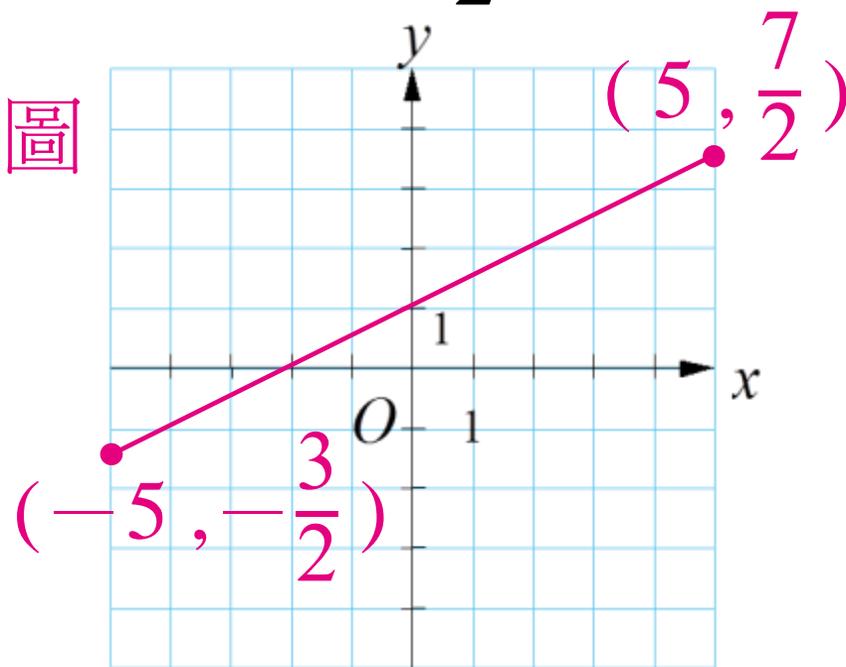


**解**

(1) 兩組解  $(5, \frac{7}{2})$  和  $(-5, -\frac{3}{2})$ ，如右圖

(2)	$x$	-4	-2	0	2	4
	$y$	-1	0	1	2	3

是【答案僅供參考】

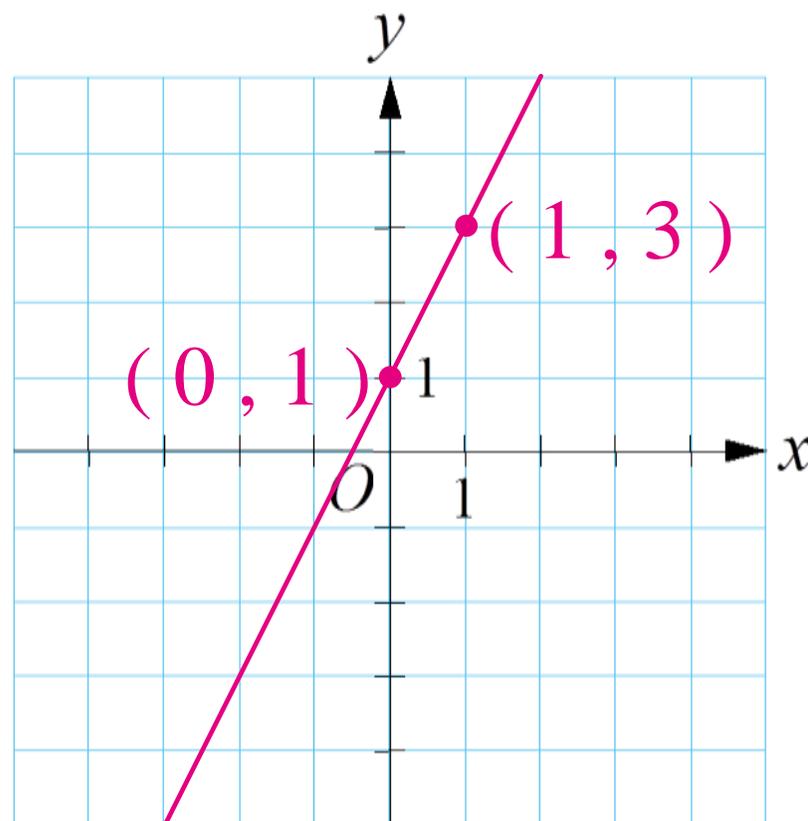
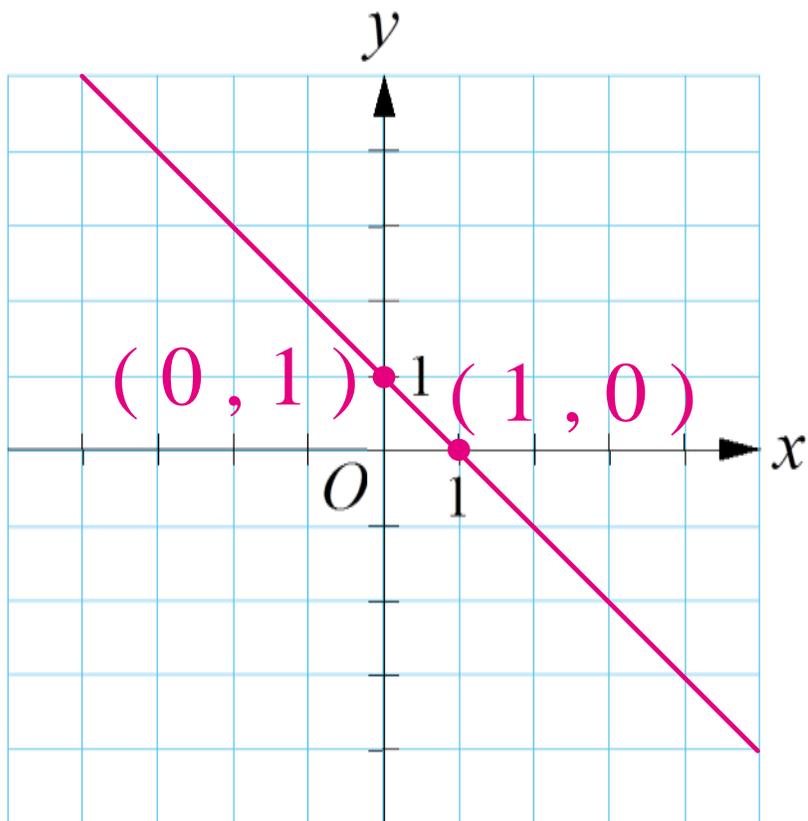


在坐標平面上，畫出下列各方程式的圖形。

(1)  $y = -x + 1$

(2)  $y = 2x + 1$

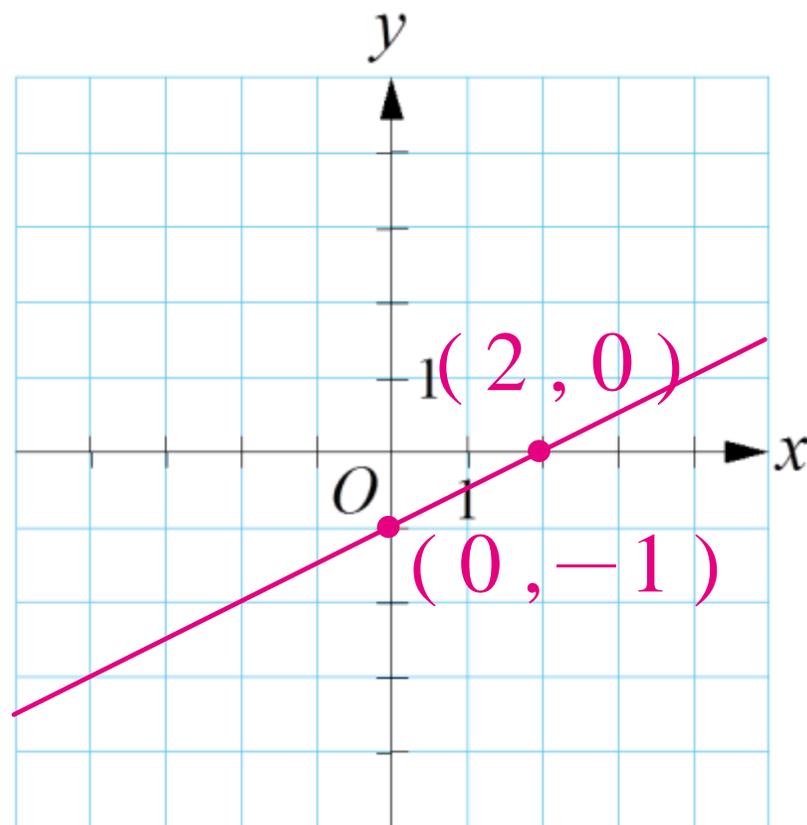
解



在坐標平面上畫出下列方程式的圖形，並求出與  $x$  軸、 $y$  軸的交點坐標及判斷此圖形不通過第幾象限。

$$(1) y = \frac{1}{2}x - 1$$

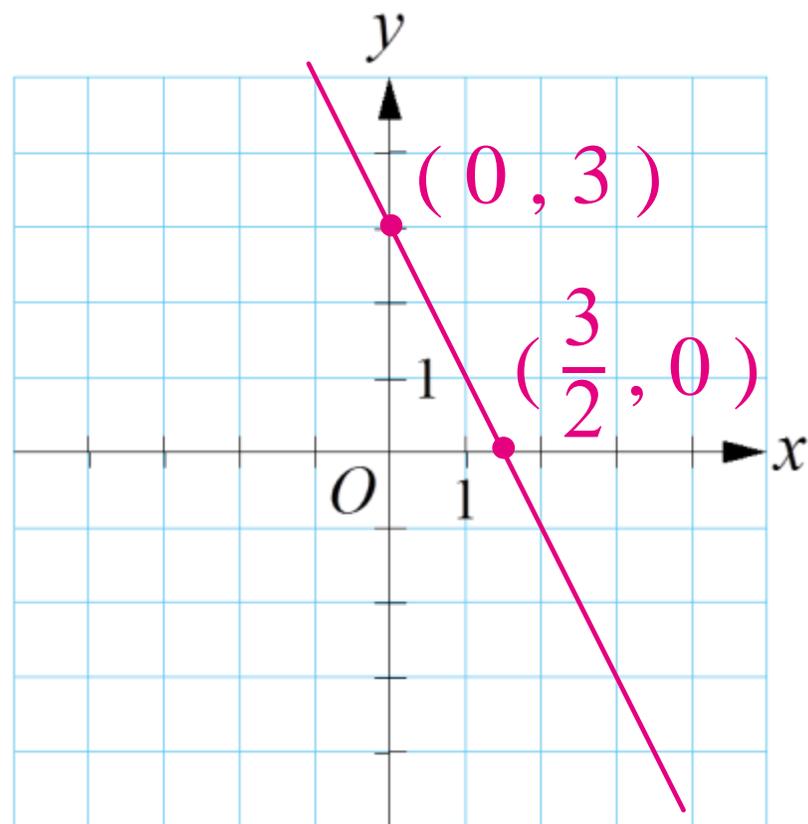
**解** 與  $x$  軸的交點坐標為  $(2, 0)$ ，  
與  $y$  軸的交點坐標為  $(0, -1)$ ，  
不通過第二象限



在坐標平面上畫出下列方程式的圖形，並求出與  $x$  軸、 $y$  軸的交點坐標及判斷此圖形不通過第幾象限。

(2)  $2x + y = 3$

**解** 與  $x$  軸的交點坐標為  $(\frac{3}{2}, 0)$ ，  
與  $y$  軸的交點坐標為  $(0, 3)$ ，  
不通過第三象限



在坐標平面上，直線  $L$  的方程式為  $y = -3x + a$ 。若  $a > 0$ ，則  $L$  不通過 第幾象限？

【95 年第一次基本學測】

- (A)一                      (B)二                      (C)三                      (D)四

**解** (C)



寫出方程式  $0x + y = -3$  上的五個解，並檢驗這些點是否在同一直線上。

**解**

$(0, -3)$ 、 $(1, -3)$ 、 $(2, -3)$ 、 $(-1, -3)$ 、 $(-2, -3)$

這五點都在  $0x + y = -3$  的直線上

【答案僅供參考】



在坐標平面上，下列敘述何者正確？

- (A)  $x=c$  表示一條直線
- (B)  $y=c$  表示一個點
- (C)  $x=0$  表示  $x$  軸
- (D)  $y=c$  ( $c \neq 0$ ) 表示垂直  $x$  軸的直線

**解**

(A)



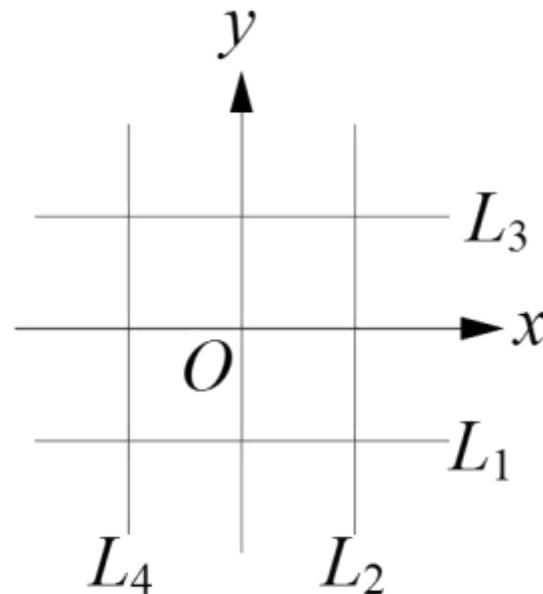
右圖是四直線  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 、 $L_4$  在坐標平面上的位置，其中有一條直線為方程式  $y+4=0$  的圖形，求此方程式圖形為何？

【96 年第一次基本學測】

- (A)  $L_1$
- (B)  $L_2$
- (C)  $L_3$
- (D)  $L_4$

解

(A)



坐標平面上，若點  $(-5, 2)$  在方程式  $-2x + ay = 4$  上，  
則  $a = ?$

(A)  $-6$

(B)  $-3$

(C)  $4$

(D)  $7$

**解**

(B)



若點  $(2, 3)$ 、 $(-1, b)$  都在方程式  $ax + 5y = 9$  的直線上，  
則  $a$  與  $b$  之值分別為何？

**解**

$$a = -3, b = \frac{6}{5}$$



下列哪些方程式的圖形會通過原點？

(A)  $3x + y = 0$

(B)  $\frac{1}{2}x - 5y = 3$

(C)  $x = -2y$

(D)  $x + y - 1 = 0$

**解**

(A)、(C)



若方程式  $ax + by = 4$  的圖形會通過  $(2, -2)$ 、 $(3, -5)$  兩點，則：

(1) 求  $a$ 、 $b$  之值。

(2) 若  $(m, 0)$  也在  $ax + by = 4$  的圖形上，求  $m = ?$

**解** (1)  $a=3$ 、 $b=1$  (2)  $\frac{4}{3}$



有一道路的方程式為  $ax + by = 1$ ，已知此道路通過  $A(1, -1)$ 、 $B(-2, 3)$  兩個城市，則：

(1)  $a = ?$   $b = ?$

(2) 若有一城市  $C(7, t)$  也在此直線道路上，則  $t = ?$

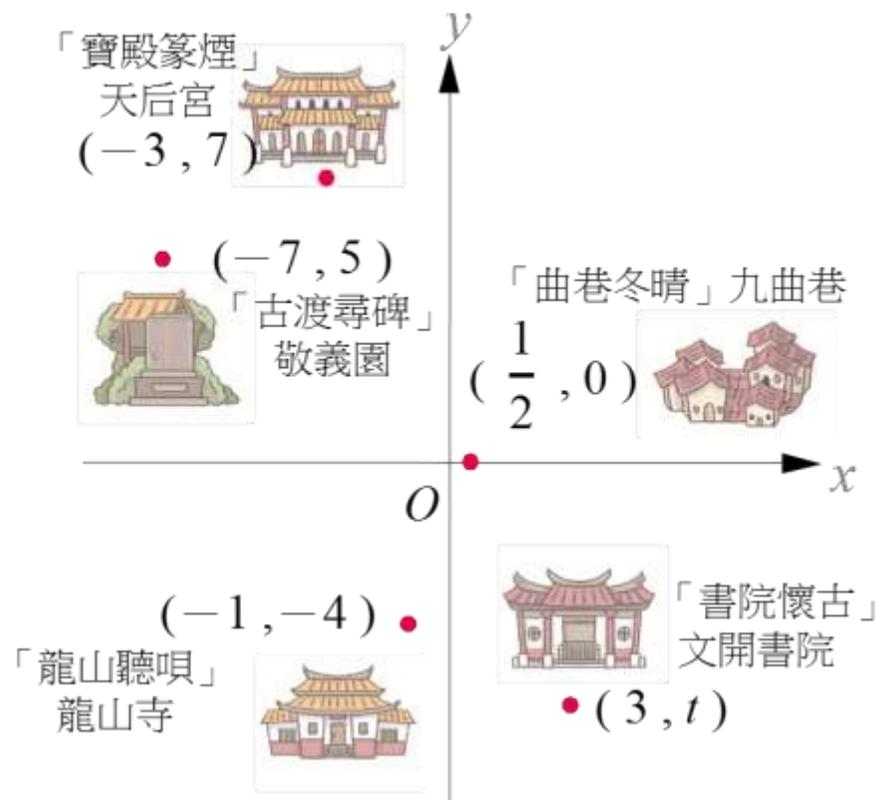
**解** (1)  $a = 4$ 、 $b = 3$  (2)  $-9$



鹿港小鎮是臺灣歷史悠久的文化古鎮，其中八景十二勝更是遊覽勝地。若坐標平面地圖中，鹿港八景中的三景「曲

巷冬晴」九曲巷  $(\frac{1}{2}, 0)$ 、「寶殿  
篆煙」天后宮  $(-3, 7)$ 及「書院  
懷古」文開書院  $(3, t)$ 恰好都在  
方程式  $y = ax + b$  的圖形上，  
則：

- (1)  $a$ 、 $b$  的值分別為多少？
- (2)  $t$  的值為多少？



**解**

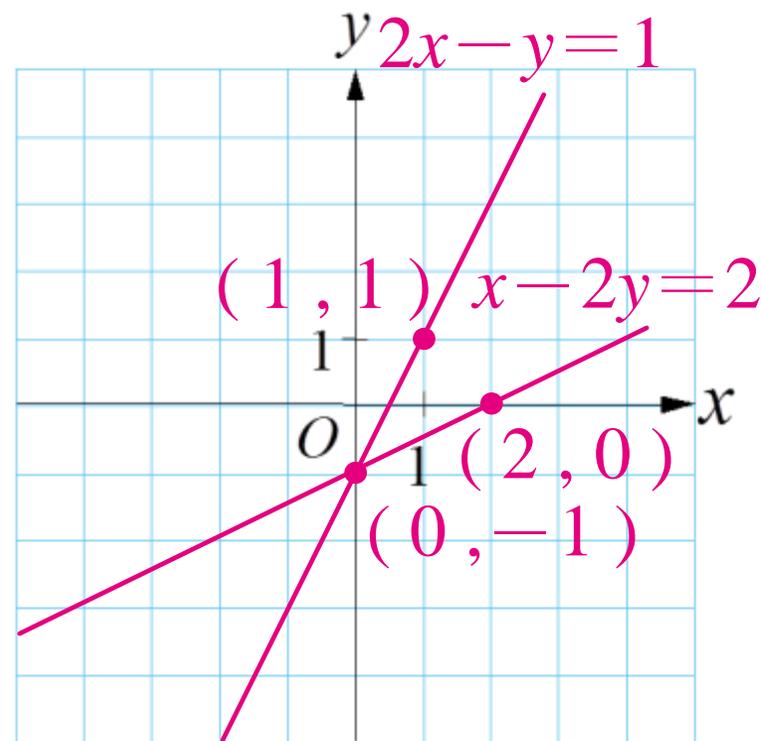
(1)  $a = -2$ 、 $b = 1$     (2)  $-5$

回答下列問題：

(1) 解二元一次聯立方程式  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ 。

(2) 在坐標平面上分別畫出二元一次方程式  $2x - y = 1$ 、 $x - 2y = 2$  的圖形。

(3) 若直線  $3x - ay = -1$  通過  $2x - y = 1$  與  $x - 2y = 2$  的交點，則  $a = ?$



**解**

(1)  $x = 0$ 、 $y = -1$

(2) 如右圖

(3)  $-1$

在坐標平面上分別畫出二元一次方程式  $3x - 2y = 7$ 、  
 $x - 3y = 14$  的圖形，並求出其交點坐標。

**解** 圖略，交點坐標為  $(-1, -5)$



在坐標平面上分別畫出二元一次方程式  $2x + y = 18$ 、  
 $3x + 5y = 34$  的圖形，並求出其交點坐標。

**解** 圖略，交點坐標為  $(8, 2)$



在直角坐標平面上畫出  $L_1 : 2x - y = 4$  與  $L_2 : x + 2y + 3 = 0$  的圖形，並求出  $L_1$ 、 $L_2$  與  $x$  軸所圍成的三角形面積是多少？

**解** 圖略，5

