

3-1 比例式

Are You Ready ?

主題1 比與比值

主題2 比例式

主題3 應用問題

重點整理

自我評量

+++ 比與比值

解

小靖和小翊參加大胃王比賽，在同一時間內小靖吃了 12 個熱狗堡，小翊吃了 15 個熱狗堡，則小靖、小翊所吃的熱狗堡個數比可記為 12 : 15，比值是 $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ 。



+++ 相等的比

在下列各 中填入適當的數值。

解

$$(1) 14 : 21 = 42 : \boxed{63}$$

$$(2) 10 : 21 = \boxed{50} : 105$$



+++ 正比

下表是 5 元硬幣個數和總金額的關係，完成下表。

解

5 元硬幣個數(個)	10	20	33	40	130
總金額(元)	50	100	165	200	650



+++ 速率

甲、乙兩地的距離是 180 公里，搭客運要 2 小時，騎機車要 3 小時，則客運和機車的平均時速分別為多少？

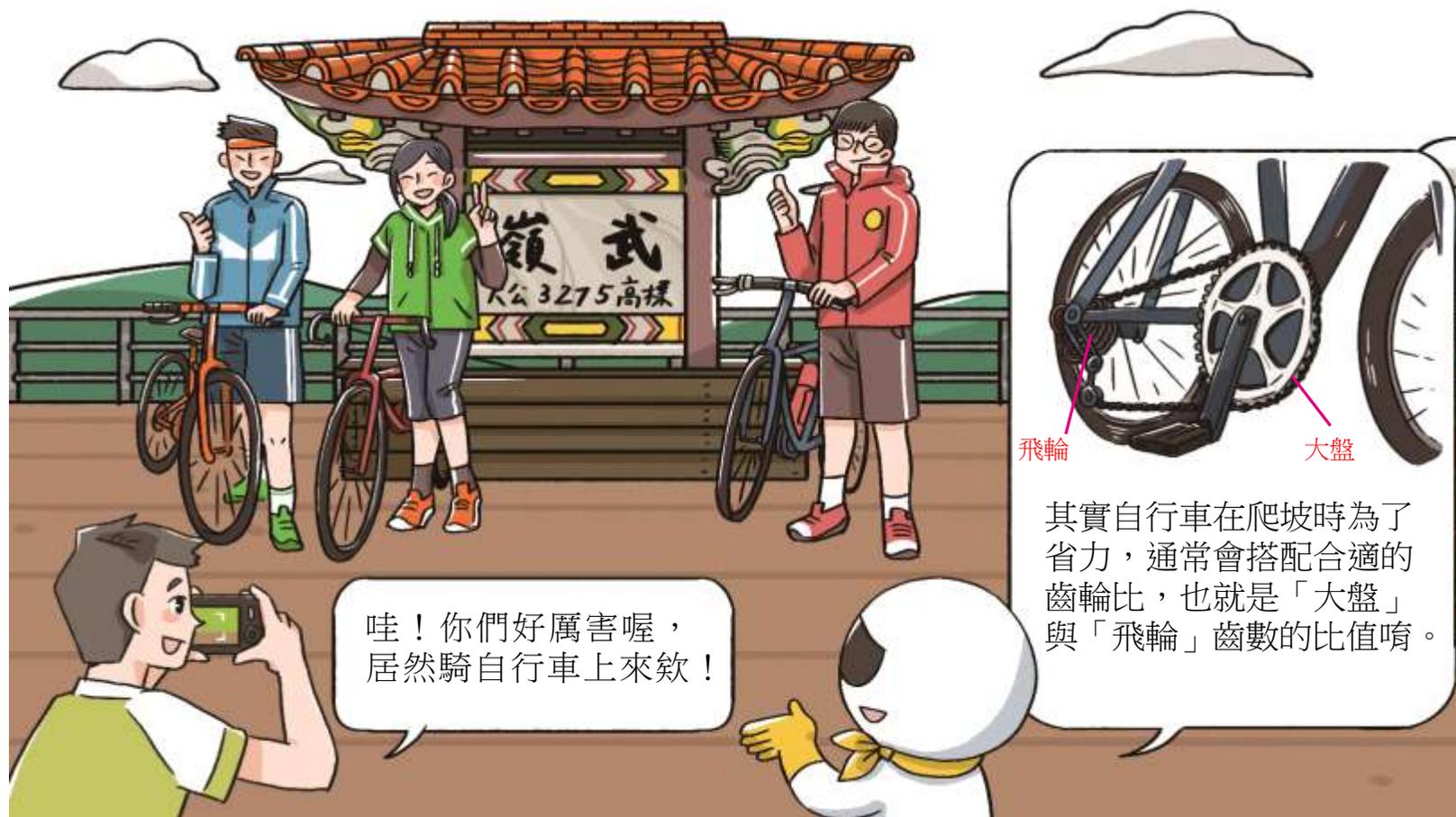
解

客運時速 90 公里，機車時速 60 公里



晶瑩剔透的泡泡，從口中一顆顆的吹出，是許多人童年的回憶之一。你曾經自製過泡泡水嗎？在調製泡泡水的配方中，洗碗精或洗髮精等與水的比例是重要的關鍵，同時也會影響泡泡的持久時間。本章我們就來介紹比例的概念。





你知道嗎？

在自行車中，大盤與飛輪齒數的比值稱為「齒輪比」。運用不同的齒輪比可達到省力或提升行車速度的效果。

國小時我們學過比和比值的概念，在上面的情境中，當自行車的大盤齒數為 39 齒、飛輪齒數為 13 齒，我們就說大盤齒數與飛輪齒數的比為 39 比 13，記為 39 : 13，其中 39 稱為**前項**，13 稱為**後項**。

將前項除以後項所得到的數稱為**比值**，因此 $39 \div 13 = \frac{39}{13} = 3$ ，即 3 為 39 : 13 的比值，也就是說大盤齒數是飛輪齒數的 3 倍。



因此，若甲與乙的比為 $a : b$ ($b \neq 0$)，則：

- (1) 甲：乙的比值為 $\frac{a}{b}$ 。
- (2) 甲是乙的 $\frac{a}{b}$ 倍。



學習時光機

在數學上，比用來表示兩個數量的關係，以符號「：」來表示。

例 1 生活中的比例關係

搭配課本p91

右圖是調製泡泡水的配方，根據配方回答下列問題：

- (1) 調製泡泡水所需的清水容量：膠水容量為 _____：_____，比值為_____。
- (2) 清水容量是膠水容量的_____倍。
- (3) 膠水容量是清水容量的_____倍。



泡泡水配方

材料：
清水 200 毫升
洗碗精 100 毫升
膠水 50 毫升



解

- (1) 調製泡泡水所需的清水容量：膠水容量為 200：50，其比值為 $\frac{200}{50} = 4$ 。

例 1 生活中的比例關係

搭配課本p91

右圖是調製泡泡水的配方，根據配方回答下列問題：

- (1) 調製泡泡水所需的清水容量：膠水容量為_____：_____，比值為_____。
- (2) 清水容量是膠水容量的_____倍。
- (3) 膠水容量是清水容量的_____倍。



泡泡水配方

材料：
清水 200 毫升
洗碗精 100 毫升
膠水 50 毫升



解

(2) 由(1)得清水容量是膠水容量的 4 倍。

例 1 生活中的比例關係

搭配課本p91

右圖是調製泡泡水的配方，根據配方回答下列問題：

- (1) 調製泡泡水所需的清水容量：膠水容量為 _____：_____，比值為_____。
- (2) 清水容量是膠水容量的_____倍。
- (3) 膠水容量是清水容量的_____倍。



泡泡水配方

材料：
清水 200 毫升
洗碗精 100 毫升
膠水 50 毫升



解

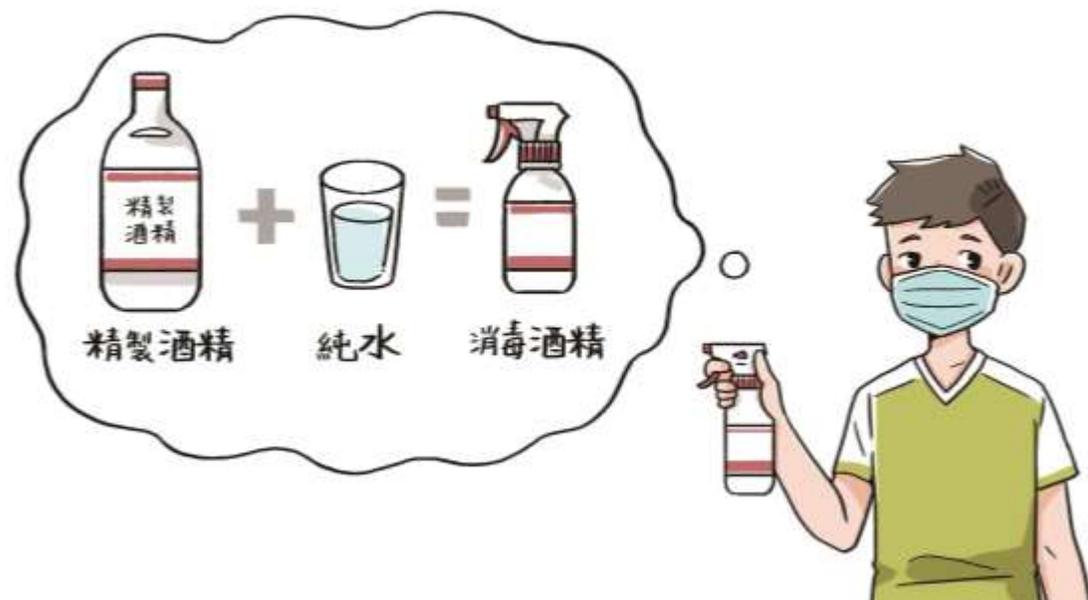
(3) 因為膠水容量：清水容量 = 50：200，
所以膠水容量是清水容量的 $\frac{50}{200} = \frac{1}{4}$ 倍。

為因應民眾防疫消毒的需求，台糖提供消毒酒精的調配方式，只要將台糖生產的「精製酒精」300 c.c.加上純水80 c.c.，即可調配成可用的「消毒酒精」。在此調配比例中，「精製酒精」的容量是純水容量的 $\frac{15}{4}$ 倍。



解 精製酒精的容量是純水容量

的 $\frac{300}{80} = \frac{15}{4}$ 倍



例 2 打擊率

搭配課本p92

「打擊率」是棒球運動中評量打者成績的指標之一，其計算方式為選手「安打次數」與「總打擊次數」的比值，通常會化為小數並四捨五入取到小數點後第3位。設某職棒選手在最近108次打擊次數中，共擊出29支安打，則：

(1) 該選手這段時間的打擊率為幾成？

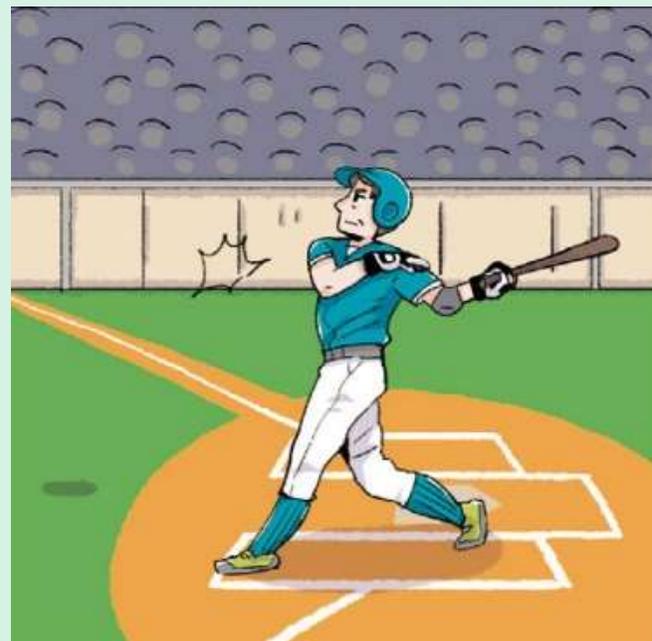


解

(1) $29 : 108$ 的比值是 $\frac{29}{108}$ ，

化為小數為 0.269 (以四捨五入取到小數點後第3位)，
一般記為 .269，讀作 2 成 69，
即該選手這段時間的打擊率為 2 成 69。

「打擊率」是棒球運動中評量打者成績的指標之一，其計算方式為選手「安打次數」與「總打擊次數」的比值，通常會化為小數並四捨五入取到小數點後第3位。設某職棒選手在最近108次打擊次數中，共擊出29支安打，則：



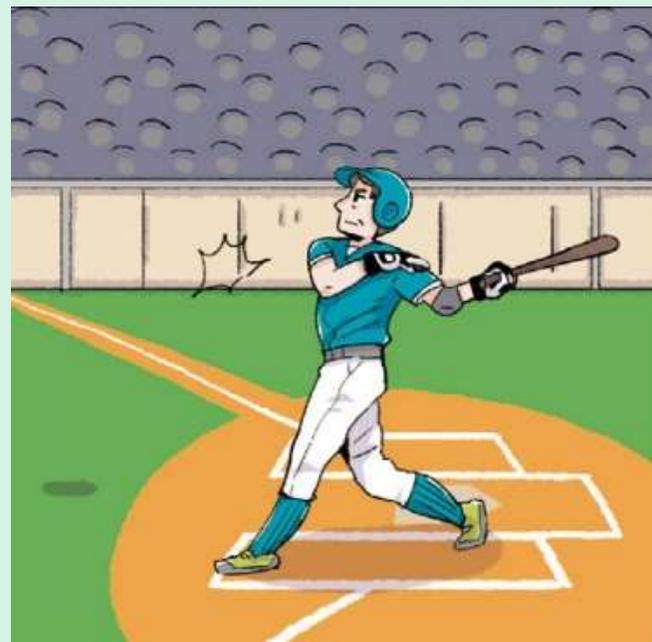
(2) 若該選手希望在之後增加的42次打擊次數中，將打擊率提升為3成，則他必須在這42次打擊次數中擊出幾支安打？



解

(2) 此時該選手總打數為 $108 + 42 = 150$ (次)，
若要將打擊率提升為3成，
應該要有的安打總數為 $150 \times 0.3 = 45$ (支)，

「打擊率」是棒球運動中評量打者成績的指標之一，其計算方式為選手「安打次數」與「總打擊次數」的比值，通常會化為小數並四捨五入取到小數點後第3位。設某職棒選手在最近108次打擊次數中，共擊出29支安打，則：



(2) 若該選手希望在之後增加的42次打擊次數中，將打擊率提升為3成，則他必須在這42次打擊次數中擊出幾支安打？



解 (2) 即該選手必須在這42次打擊次數中，擊出 $45 - 29 = 16$ 支安打。

在一場籃球比賽中，選手的「投進球數」和「總投球數」的比值，稱為該選手的「命中率」，通常以百分率表示。若某次投籃比賽中，小翊共投進 21 球，命中率为 70% (或 7 成)，則他的總投球數為多少？

解 設總投球數為 x 球 ($x > 0$)

21 : x 的比值是 $\frac{21}{x}$

$$\frac{21}{x} \times 100\% = 70\% , x = 30$$

所以總投球數為 30 球



先前學過的比都是兩個正數的比。事實上，也可以含有負數的比。

一般而言，兩個數 a 、 b ，

(1) 我們將 a 與 b 的比記為 $a : b$ ，讀作 a 比 b ，

其中 a 稱為這個比的前項，

b 稱為這個比的後項。

(2) $a : b$ 的比值為 $a \div b = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。

圖解筆記

比值

$a : b$

↑

前項

↑

後項

$$\begin{aligned} \text{→ 比值} &= \frac{\text{前項}}{\text{後項}} \\ &= \frac{a}{b} \quad (b \neq 0) \end{aligned}$$



例 3 比的比值

寫出下列各比的比值，並以最簡分數表示。

(1) $(-2) : 3$ (2) $\frac{2}{3} : (-\frac{3}{4})$ (3) $(-0.7) : (-1.3)$

解

(1) $(-2) : 3$ 的比值為 $(-2) \div 3 = -\frac{2}{3}$ 。

(2) $\frac{2}{3} : (-\frac{3}{4})$ 的比值為 $\frac{2}{3} \div (-\frac{3}{4})$
 $= \frac{2}{3} \times (-\frac{4}{3})$
 $= -\frac{8}{9}$ 。



例 3 比的比值

寫出下列各比的比值，並以最簡分數表示。

(1) $(-2) : 3$ (2) $\frac{2}{3} : (-\frac{3}{4})$ (3) $(-0.7) : (-1.3)$

解 (3) $(-0.7) : (-1.3)$ 的比值為

$$(-0.7) \div (-1.3)$$

$$= (-\frac{7}{10}) \div (-\frac{13}{10})$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{10}{13}$$

$$= \frac{7}{13} \circ$$

Hint

(3)也可以這樣做：

$$(-0.7) \div (-1.3)$$

$$= \frac{-0.7}{-1.3}$$

$$= \frac{7}{13}$$

分子、分母
同乘以-10



寫出下列各比的比值，並以最簡分數表示。

解

$$(1) (-24) : (-12)$$

$(-24) : (-12)$ 的比值

$$= (-24) \div (-12)$$

$$= \frac{-24}{-12}$$

$$= 2$$

$$(2) \frac{1}{2} : \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$\frac{1}{2} : \left(-\frac{2}{3}\right)$ 的比值

$$= \frac{1}{2} \div \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{4}$$



寫出下列各比的比值，並以最簡分數表示。

解

$$(3) (-0.3) : 2.4$$

$(-0.3) : 2.4$ 的比值

$$= (-0.3) \div 2.4$$

$$= \left(-\frac{3}{10}\right) \div \frac{24}{10}$$

$$= \left(-\frac{3}{10}\right) \times \frac{10}{24}$$

$$= -\frac{1}{8}$$



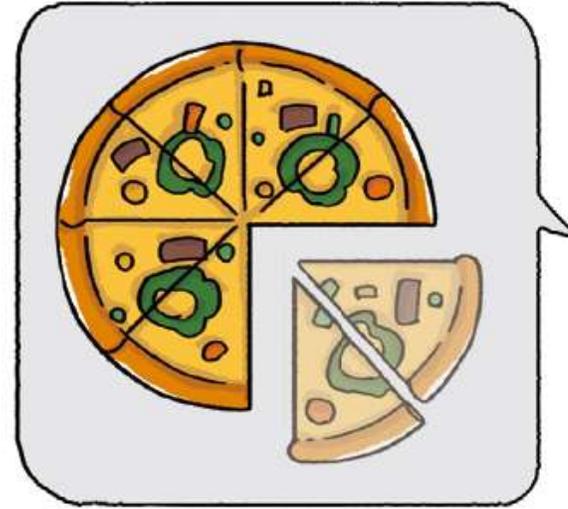
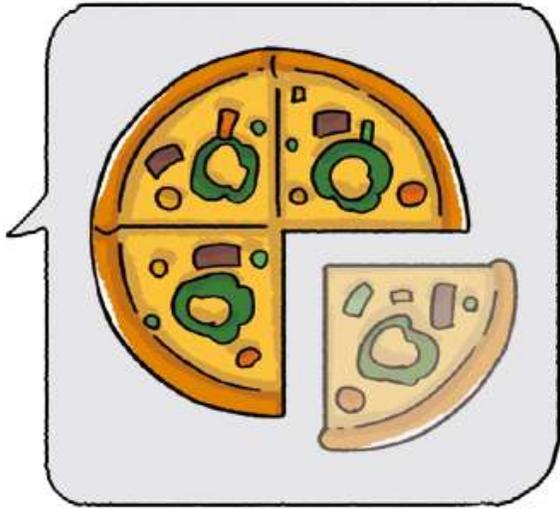
相等的比

有兩個大小相同的披薩，小妍將其中一個披薩平均切成4塊，吃了1塊；小翊將另一個披薩平均切成8塊，吃了2塊。小妍和小翊兩人吃掉的部分與整個披薩的比分別為1:4及2:8，兩個比的比值都是 $\frac{1}{4}$ ，這時候我們說1:4與2:8相等，寫成 $1:4=2:8$ 。當幾個比的比值相等時，我們說這幾個比是相等的比。





小妍



小翊



你知道嗎？

披薩(*pizza*)的發源地是義大利的拿坡里，意思是混合著番茄、起司及不同食材烘焗而成的餅。

下列何者與 $30 : 20$ 是相等的比？

(A) $3 : 2$ (B) $2 : 3$ (C) $1 : \frac{2}{3}$ (D) $\frac{2}{3} : 1$ (E) $\frac{3}{2} : 1$

解

$30 : 20$ 的比值是 $\frac{30}{20} = \frac{3}{2}$

(B)、(D)的比值皆是 $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$

而(A)、(C)、(E)與 $30 : 20$ 是相等的比



我們也可以利用比值的分子、分母同乘以或同除以不為 0 的數，得到比的運算性質，例如：

分子、分母同乘以 20

$$\frac{600}{400} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

分子、分母同除以 10

前項、後項同乘以 20

$$600 : 400 = 30 : 20 = 3 : 2$$

前項、後項同除以 10



由上面的說明，我們可以得到：

Key point

相等的比

已知 a 、 b 、 m 三個數，其中 b 、 m 皆不為 0，
則：

$$(1) a : b = (a \times m) : (b \times m) \circ$$

$$(2) a : b = (a \div m) : (b \div m) \circ$$



例 4 相等的比

在下列各 中填入適當的數值。

(1) $8 : 18 = 4 : \square$

(2) $2 : (-7) = (-12) : \square$

解

(1) $8 : 18 = 4 : \square$,

而 $18 \div 2 = 9$,
所以 中填 9 。

(2) $2 : (-7) = (-12) : \square$,

而 $(-7) \times (-6) = 42$,
所以 中填 42 。



在下列各□中填入適當的數值。

$$(1) (-15) : 20 = 3 : \square$$

$$(2) 3 : 7 = \square : (-14)$$

解

$$\square = -4$$

$$\square = -6$$



當一個比的前、後項都是整數，且前、後項彼此互質時，我們說這個比為**最簡整數比**，其比值為最簡分數。

例如 $3:2$ 與 $2:9$ 都是最簡整數比；

$60:40$ 與 $1:\frac{9}{2}$ 則不是最簡整數比。

習慣上，我們會將一個比以最簡整數比表示。



學習時光機

若兩整數的最大公因數為 1，就稱這兩整數互質。

將下列各比化為最簡整數比。

解

$$(1) 13 : 26 \\ = 1 : 2$$

$$(2) 14 : (-35) \\ = 2 : (-5)$$

$$(3) \frac{1}{3} : \frac{1}{2} \\ = 2 : 3$$



在第 94 頁學過兩個相等的比 $a : b$ 和 $c : d$ ，可寫成 $a : b = c : d$ ，這種等式稱為**比例式**，其中 b 、 c 稱為這個比例式的**內項**， a 、 d 稱為這個比例式的**外項**。

當 $a : b = c : d$ ，即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，

將算式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 的等號兩邊同乘以 bd ，即

$$\frac{a}{\cancel{b}} \times \cancel{bd} = \frac{c}{\cancel{d}} \times \cancel{bd}，\text{ 得到 } ad = bc。$$

圖解筆記

比例式

內項

$$a : b = c : d$$

外項



$$ad = bc$$



Key point

比例式的運算性質①

若比例式 $a : b = c : d$ ，則 $ad = bc$ ，
即比例式的外項乘積等於內項乘積。



例 5 比例式運算性質①的應用

搭配課本p96

求下列各比例式中的 x 值。

$$(1) 8 : 9 = 14 : x$$

$$(2) (x - 2) : 6 = (x + 8) : 8$$

解

(1) 因為 $8 : 9 = 14 : x$

所以 $8 \times x = 9 \times 14$

$$\begin{aligned} x &= \frac{9 \times 14}{8} \\ &= \frac{63}{4} \end{aligned}$$

(2) 因為 $(x - 2) : 6 = (x + 8) : 8$

所以 $(x - 2) \times 8 = 6 \times (x + 8)$

$$8x - 16 = 6x + 48$$

$$2x = 64$$

$$x = 32$$





求下列各比例式中的 x 值。

解

$$(1) \frac{2}{3}x : \frac{3}{2} = 8 : 1$$

$$\frac{2}{3}x \times 1 = \frac{3}{2} \times 8$$

$$\frac{2}{3}x = 12$$

$$x = 18$$

$$(2) (2x + 1) : (x - 3) = (-3) : 2$$

$$(2x + 1) \times 2 = (x - 3) \times (-3)$$

$$4x + 2 = -3x + 9$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$



由比例式的外項乘積等於內項乘積可知，
若比例式 $x : y = 2 : 3$ ，則 $3x = 2y$ ，將等號兩邊同除以 6，
得 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ 。

若設 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = r$ ，可得 $x = 2r$ 、 $y = 3r$ 。

Key point

比例式的運算性質②

若 $x : y = a : b$ ，其中 a 、 b 均不為 0，則：

- (1) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ 或 $x : a = y : b$ 。
- (2) 可設 $x = ar$ 、 $y = br (r \neq 0)$ 。



例 6 比例式運算性質②的應用

搭配課本p97

有兩數 x 、 y ，已知 $x : y = 3 : 2$ ，且 $x + y = 20$ ，則 x 、 y 的值分別為多少？

解

由 $x : y = 3 : 2$ ，

可設 $x = 3r$ 、 $y = 2r (r \neq 0)$ ，

代入 $x + y = 20$ ，

得 $3r + 2r = 20$ ， $r = 4$ ，

所以 $x = 3r = 12$ 、 $y = 2r = 8$ 。



有兩數 x 、 y ，已知 $x : y = 5 : 7$ ，且 $x - y = 30$ ，則 x 、 y 的值分別為多少？

解

由 $x : y = 5 : 7$

可設 $x = 5r$ 、 $y = 7r (r \neq 0)$

代入 $x - y = 30$

得 $5r - 7r = 30$ ， $r = -15$

所以 $x = 5r = -75$

$y = 7r = -105$



例 7 比例式運算性質②的應用

搭配課本p98

設 x 、 y 皆不為 0，且 $7x=4y$ ，求下列各比的比值。

(1) $x : y$ (2) $2x : 3y$

解

$$7x=4y$$

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{7}$$

同除以 28

設 $\frac{x}{4}=\frac{y}{7}=r(r \neq 0)$ ，

得 $x=4r$ 、 $y=7r$ ，

(1) $x : y = 4r : 7r$
 $= 4 : 7$ 同除以 r

所以 $x : y$ 的比值為 $\frac{4}{7}$ 。

Hint

(1) 也可以這樣做：

由 $7x=4y$

$$\frac{7x}{y}=4$$

同除以 y

$$\frac{x}{y}=\frac{4}{7}$$

同除以 7

得 $x : y = 4 : 7$

例 7 比例式運算性質②的應用

搭配課本p98

設 x 、 y 皆不為 0，且 $7x=4y$ ，求下列各比的比值。

(1) $x : y$ (2) $2x : 3y$

解

$$(2) 2x : 3y = (2 \times 4r) : (3 \times 7r)$$

$$= 8r : 21r$$

$$= 8 : 21$$

同除以 r

所以 $2x : 3y$ 的比值為 $\frac{8}{21}$ 。





設 x 、 y 皆不為 0，且 $3x=5y$ ，則：

$$(1) x : y = \underline{5} : \underline{3}。$$

$$(2) 7x : 3y = \underline{35} : \underline{9}。$$

解 $3x=5y$ 同除以 15，得 $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}$

$$\text{設 } \frac{x}{5}=\frac{y}{3}=r(r \neq 0)$$

$$\text{得 } x=5r、y=3r$$

$$(1) x : y = 5r : 3r = 5 : 3$$

$$(2) 7x : 3y = (7 \times 5r) : (3 \times 3r) = 35 : 9$$



例 8 比例式運算性質的綜合運用

搭配課本p99

設 $(a+b) : (a-b) = 3 : (-2)$ ，計算下列各式。

(1) $a : b = \underline{\hspace{2cm}} : \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $b : (a-b)$ 的比值。

解 (1) $(a+b) : (a-b) = 3 : (-2)$

$$(-2) \times (a+b) = 3 \times (a-b)$$

$$-2a - 2b = 3a - 3b$$

$$5a = b$$

$$a : b = 1 : 5$$



例 8 比例式運算性質的綜合運用

搭配課本p99

設 $(a+b) : (a-b) = 3 : (-2)$ ，計算下列各式。

(1) $a : b = \underline{\hspace{2cm}} : \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $b : (a-b)$ 的比值。

解 (2) 由(1)可設 $a=r$ 、 $b=5r(r \neq 0)$ ，

$$\begin{aligned} \text{則 } b : (a-b) &= 5r : (-4r) \\ &= 5 : (-4) \end{aligned}$$

所以 $b : (a-b)$ 的比值為 $-\frac{5}{4}$ 。

Hint

(2)也可以這樣做：
由(1) $5a=b$ 代入，
則 $b : (a-b)$
 $= 5a : (-4a)$
 $= 5 : (-4)$ 。



設 $(a+b) : (a-b) = (-5) : 2$ ，計算下列各式。

(1) $a : b = \underline{3} : \underline{7}$ 。

(2) 計算 $\frac{a+3b}{a-3b}$ 的值。

解

$$(1) (a+b) : (a-b) = (-5) : 2$$

$$2 \times (a+b) = (-5) \times (a-b)$$

$$2a + 2b = -5a + 5b$$

$$7a = 3b$$

$$a : b = 3 : 7$$

(2) 由(1)可設 $a = 3r$ 、 $b = 7r (r \neq 0)$

$$\text{則 } \frac{a+3b}{a-3b} = \frac{3r+3 \times 7r}{3r-3 \times 7r} = \frac{24r}{-18r} = -\frac{4}{3}$$



比與比值、比例式在生活中的應用非常廣泛，以下舉些例子說明。



例 9 倍數問題

搭配課本p100

小翊和小靖各有一些零用錢，且小翊零用錢的2倍和小靖零用錢的3倍一樣多，則：

(1) 小翊的零用錢：小靖的零用錢 = _____：_____。

解

(1) 設小翊的零用錢有 x 元、

小靖的零用錢有 y 元，

依題意可得 $2x = 3y$ ，則 $x : y = 3 : 2$ 。



小翊和小靖各有一些零用錢，且小翊零用錢的 2 倍和小靖零用錢的 3 倍一樣多，則：

(2)承(1)，若小翊和小靖的零用錢共有 500 元，那麼小翊和小靖的零用錢各有多少元？



解 (2)由(1)可設小翊的零用錢有 $3r$ 元、

小靖的零用錢有 $2r$ 元 ($r > 0$)，

依題意可得 $3r + 2r = 500$

$$r = 100$$

所以小翊的零用錢有 $3 \times 100 = 300$ 元，

小靖的零用錢有 $2 \times 100 = 200$ 元。

箱子裡有一些蘋果和梨子，若蘋果顆數的 5 倍等於梨子顆數的 4 倍，且蘋果比梨子少 21 顆，則蘋果和梨子各有多少顆？

解 設蘋果有 x 顆、梨子有 y 顆

依題意可得 $5x=4y$ ，

$$x : y = 4 : 5$$

設 $x=4r$ 、 $y=5r(r>0)$

$$4r=5r-21$$

$$r=21$$

所以蘋果有 $4 \times 21 = 84$ 顆

梨子有 $5 \times 21 = 105$ 顆



亞駿和雅婷都喜愛跑馬拉松，已知兩人原本跑的公里數比是 6 : 5，後來兩人分別又跑了 5 公里和 3 公里，結果總里程數的比變為 5 : 4，則兩人原本各跑了多少公里？

想法 ① 亞駿和雅婷原本跑的公里數比是 6 : 5。

$$\Rightarrow \text{♂} : \text{♀} = 6 : 5$$

$$\textcircled{2} (\text{♂} + 5) : (\text{♀} + 3) = 5 : 4$$



亞駿和雅婷都喜愛跑馬拉松，已知兩人原本跑的公里數比是 $6:5$ ，後來兩人分別又跑了 5 公里和 3 公里，結果總里程數的比變為 $5:4$ ，則兩人原本各跑了多少公里？

解

設亞駿原跑 $6r$ 公里、雅婷原跑 $5r$ 公里($r > 0$)

依題意可得 $(6r + 5) : (5r + 3) = 5 : 4$

$$4(6r + 5) = 5(5r + 3)$$

$$24r + 20 = 25r + 15$$

$$r = 5$$

所以亞駿原跑 $6 \times 5 = 30$ 公里，

雅婷原跑 $5 \times 5 = 25$ 公里。



你知道嗎？

馬拉松(*marathon*)是一項考驗耐力的長跑運動，其名稱源於古希臘的馬拉松戰役。在西元 1921 年，馬拉松的長度被確立為 42.195 公里，而西元 1980 年後，半程馬拉松(約 21 公里)才在民間興起。



公園裡原有男生、女生人數比為 $9:7$ ，後來有 3 位男生和 6 位女生走出公園，剩下的男生、女生人數比變為 $3:2$ ，則公園裡原有男生、女生各多少位？

解 設公園裡原有男生 $9r$ 位、女生 $7r$ 位 ($r > 0$)

依題意可得 $(9r-3) : (7r-6) = 3 : 2$

$$2(9r-3) = 3(7r-6)$$

$$18r-6 = 21r-18$$

$$r = 4$$

所以原有男生 $9 \times 4 = 36$ 位

女生 $7 \times 4 = 28$ 位



例 11 比例尺問題

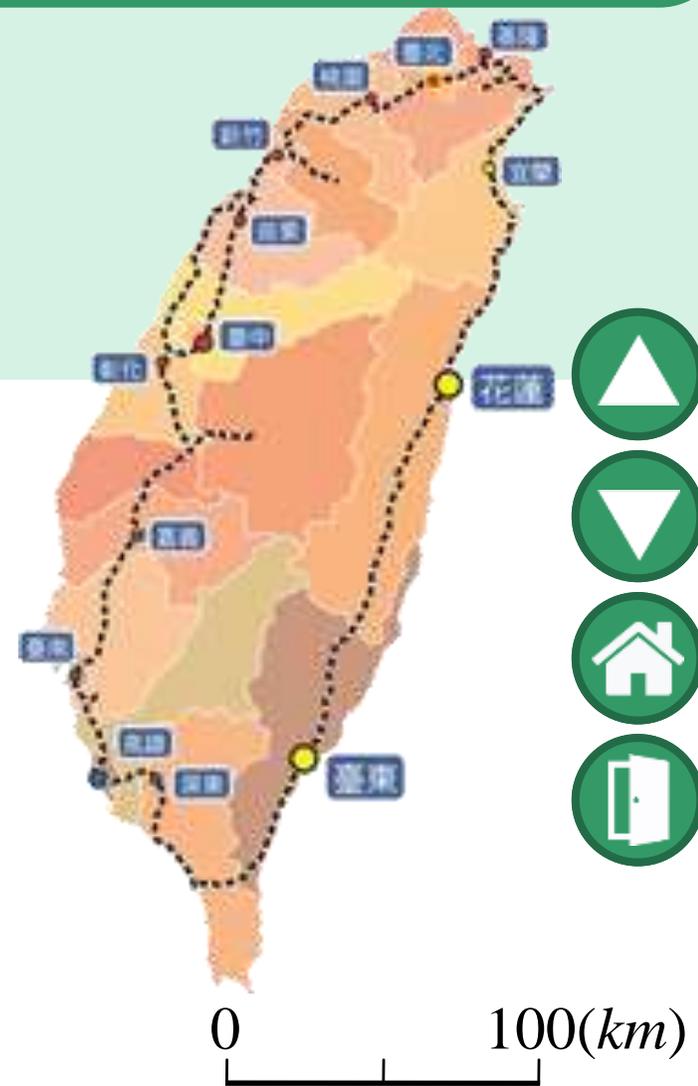
搭配課本p102

右圖是臺灣鐵道路線圖，小妍用尺量得花蓮站到臺東站的距離約為 3 公分，則這兩站的實際距離約為多少公里？

想法 右圖的比例尺為  0 100(km)

表示縮圖上長 2 公分，

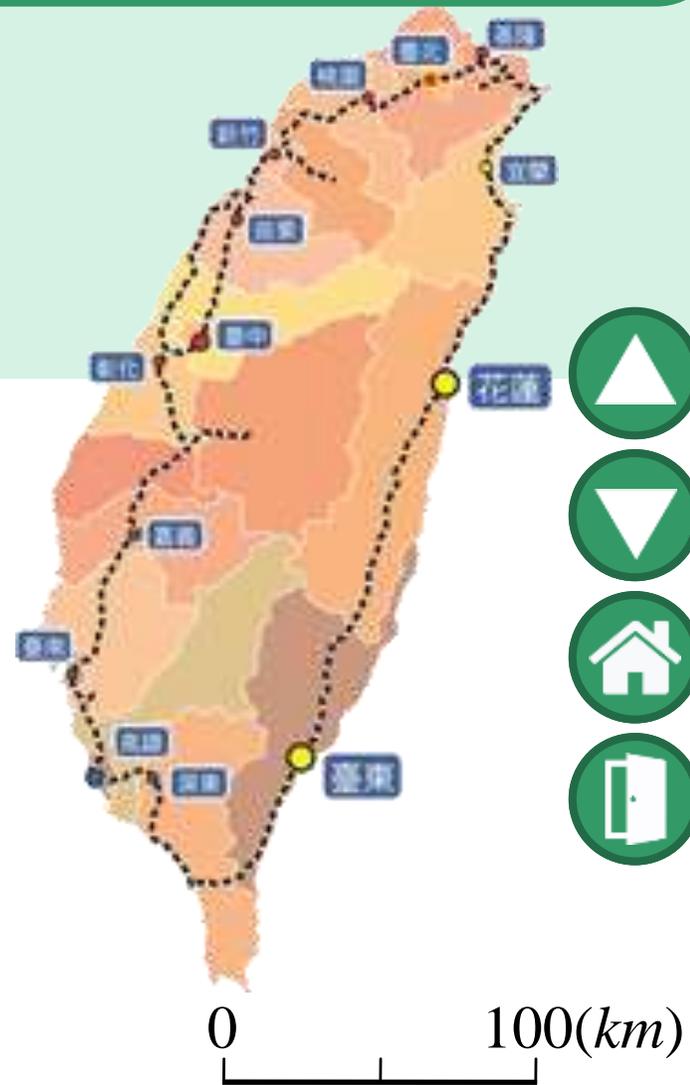
實際長是 100 公里。



例 11 比例尺問題

搭配課本p102

右圖是臺灣鐵道路線圖，小妍用尺量得花蓮站到臺東站的距離約為 3 公分，則這兩站的實際距離約為多少公里？



解 設兩站的實際距離約為 x 公里，

又兩站在地圖上的距離約為 3 公分，
可得比例式 $2 : 3 = 100 : x$ ， $x = 150$ ，
所以這兩站的實際距離約為 150 公里。

學習時光機

比例尺是指兩地在地圖上的距離和實際距離之間的比例。



裴秀

(西元 224~271 年)西晉地圖學家，曾把當時一幅天下大圖縮小繪製成比例尺為 1：1800000 的地形圖，以便判讀晉國地圖。而他提出的「製圖六體」中，包含比例尺、方位和距離，對中國後來的地圖繪製影響很大。





某國中的校園平面圖比例尺為 1 : 800，若在平面圖上，操場的長為 4 公分，寬為 2.5 公分，則操場實際的長、寬各為多少公尺？

解

設操場實際的長為 x 公分、寬為 y 公分

$$1 : 800 = 4 : x$$

$$x = 3200(\text{公分}) = 32(\text{公尺})$$

$$1 : 800 = 2.5 : y$$

$$y = 2000(\text{公分}) = 20(\text{公尺})$$

所以操場實際的長為 32 公尺、寬為 20 公尺



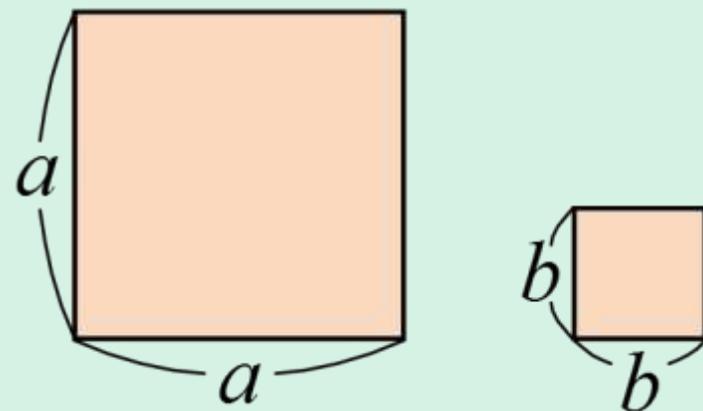
接下來，我們來探討平面圖形中，正方形邊長比與其周長比、面積比之間的關係。



例 12 正方形邊長比與其周長比、面積比的關係 搭配課本p103

如右圖，有大、小兩個正方形，設大正方形的邊長為 a ，小正方形的邊長為 b ，已知 $a : b = 5 : 2$ ，則：

(1) 大正方形與小正方形的周長比 = ？



解

由 $a : b = 5 : 2$ ，可設 $a = 5r$ 、 $b = 2r (r > 0)$ ，

(1) 大正方形周長 : 小正方形周長

$$= (a \times 4) : (b \times 4)$$

$$= (5r \times 4) : (2r \times 4)$$

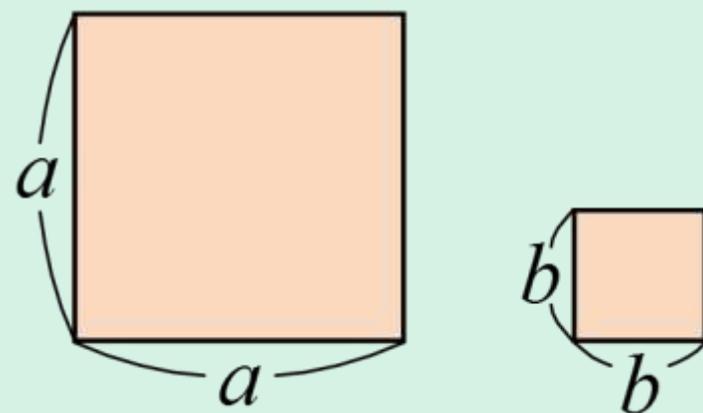
$$= 5 : 2$$

↪ 同除以 $4r$

所以大正方形與小正方形的周長比為 $5 : 2$ 。

例 12 正方形邊長比與其周長比、面積比的關係 搭配課本p103

如右圖，有大、小兩個正方形，設大正方形的邊長為 a ，小正方形的邊長為 b ，已知 $a : b = 5 : 2$ ，則：
(2)大正方形與小正方形的面積比 = ？



解 (2)大正方形面積：小正方形面積

$$\begin{aligned} &= a^2 : b^2 = (5r)^2 : (2r)^2 \\ &= 25r^2 : 4r^2 \\ &= 25 : 4 \end{aligned}$$

↪ 同除以 r^2

所以大正方形與小正方形的面積比為 $25 : 4$ 。

從例 12 可以知道，當兩正方形的邊長比為 $a : b$ 時，
周長比為 $a : b$ ，面積比為 $a^2 : b^2$ 。





將一條 80 公分的繩子以 3 : 5 的比例剪成兩段，分別圍出兩個正方形，則小正方形和大正方形的面積比為多少？

解

由題意可知小正方形周長 : 大正方形周長 = 3 : 5

則小正方形邊長 : 大正方形邊長 = 3 : 5

所以小正方形面積 : 大正方形面積 = $3^2 : 5^2$
= 9 : 25



1 比與比值

兩個數 a 、 b 的比記為 $a : b$ ，其中 a 稱為比的前項， b 稱為比的後項， $a : b$ 的比值為 $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。

例 一個比 $2 : 3$ 中， 2 為前項， 3 為後項，比值為 $\frac{2}{3}$ 。



2 相等的比

已知 a 、 b 、 m 三個數，其中 b 、 m 皆不為 0，則：

$$(1) a : b = (a \times m) : (b \times m) \circ$$

$$\boxed{\text{例}} 3 : 5 = (3 \times 2) : (5 \times 2) \circ$$

$$(2) a : b = (a \div m) : (b \div m) \circ$$

$$\boxed{\text{例}} 12 : 8 = (12 \div 4) : (8 \div 4) \circ$$



3 比例式

若 $a : b$ 和 $c : d$ 相等時，則 $a : b = c : d$ 稱為比例式，其中 b 、 c 稱為這個比例式的內項， a 、 d 稱為這個比例式的外項。

例 比例式 $2 : 3 = 6 : 9$ 中，
3、6 為這個比例式的內項，
2、9 為這個比例式的外項。



4 比例式的運算性質

(1) 若比例式 $a : b = c : d$ ，則 $ad = bc$ ，
即比例式的外項乘積等於內項乘積。

例 由比例式 $2 : 3 = 6 : 9$ ，可得 $2 \times 9 = 3 \times 6 = 18$ 。

(2) 若 $x : y = a : b$ ，其中 a 、 b 均不為 0，則：

① $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ 或 $x : a = y : b$ 。

② 可設 $x = ar$ 、 $y = br (r \neq 0)$ 。

例 若 $x : y = 3 : 5$ ，則可設 $x = 3r$ 、 $y = 5r (r \neq 0)$ 。



- 1 茶世界飲料店中賣最好的頂級紅茶，為因應顧客口味，將甜度區分如右圖，求同為 $500c.c.$ 的兩杯頂級紅茶，少糖和微糖的含糖量比是多少？(化成最簡整數比)



解

$$\begin{aligned} \text{少糖含糖量} : \text{微糖含糖量} &= \frac{3}{4} : \frac{1}{3} \\ &= 9 : 4 \end{aligned}$$

2 求下列各比例式中的 x 值。

解

$$(1) 6 : x = (-5) : 3$$

$$6 \times 3 = x \times (-5)$$

$$-5x = 18$$

$$x = -\frac{18}{5}$$

$$(2) (x - 1) : 5 = (2x + 1) : 3$$

$$3(x - 1) = 5(2x + 1)$$

$$3x - 3 = 10x + 5$$

$$7x = -8$$

$$x = -\frac{8}{7}$$



3 設 $x : 3 = y : 4$ ，且 x 、 y 皆不為 0，則：

(1) $(x + 2y) : (x - 2y)$ 的比值為多少？

解

由 $x : 3 = y : 4$

得 $x : y = 3 : 4$

可設 $x = 3r$ 、 $y = 4r$ ($r \neq 0$)

$$\frac{(x + 2y)}{(x - 2y)} = \frac{3r + 2 \times 4r}{3r - 2 \times 4r} = \frac{11r}{-5r} = -\frac{11}{5}$$



3 設 $x : 3 = y : 4$ ，且 x 、 y 皆不為 0，則：

(2) 若 $3x + y = 26$ ，則 $(x + 2) : (y - 2)$ 的比值為多少？

解

$$3 \times 3r + 4r = 26, r = 2$$

$$\text{則 } x = 3 \times 2 = 6, y = 4 \times 2 = 8$$

$$\frac{(x + 2)}{(y - 2)} = \frac{6 + 2}{8 - 2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$



4 已知有大、小兩個正方體，小正方體邊長比大正方體邊長的比值為 $\frac{1}{5}$ ，則：

(1) 小正方體表面積比大正方體表面積的比值為何？

解

設小正方體邊長為 r 、

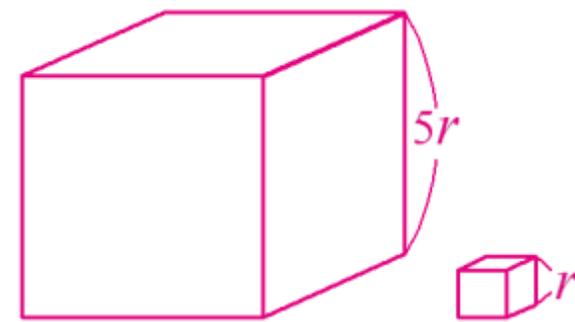
大正方體邊長為 $5r$ ($r > 0$)

則小正方體表面積：大正方體表面積

$$= (6 \times r^2) : [6 \times (5r)^2]$$

$$= 6r^2 : 150r^2 = 1 : 25$$

所以小正方體表面積比大正方體表面積的比值為 $\frac{1}{25}$



4 已知有大、小兩個正方體，小正方體邊長比大正方體邊長的比值為 $\frac{1}{5}$ ，則：

(2) 小正方體體積比大正方體體積的比值為何？

解

$$\begin{aligned} \text{小正方體體積} : \text{大正方體體積} &= r^3 : (5r)^3 \\ &= r^3 : 125r^3 \\ &= 1 : 125 \end{aligned}$$

所以小正方體體積比大正方體體積的比值為 $\frac{1}{125}$



挑戰題

小翊和小妍對於「已知 $x : y = 9 : 5$ ，且 $y \neq -1$ ，關於 $(x + 1) : (y + 1)$ 的比值」的說法如下。判斷他們的說法是否正確，並說明你的理由。

已知 $x : y = 9 : 5$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{x+1}{y+1} &= \frac{9+1}{5+1} \\ &= \frac{10}{6} \\ &= \frac{5}{3}。 \end{aligned}$$



小翊

已知 $x : y = 9 : 5$ ，

可設 $x = 9r$ 、 $y = 5r$ ($r \neq 0$)，

$$\text{故 } \frac{x+1}{y+1} = \frac{9r+1}{5r+1}，$$

這個值會隨著 r 值而改變，不是一個固定的數。



小妍



挑錯題

小翊：正確；錯誤，

理由：若 $x=18$ 、 $y=10$ ，則 $\frac{x+1}{y+1} = \frac{18+1}{10+1} = \frac{19}{11} \neq \frac{5}{3}$

小妍：正確；錯誤，

理由：



A young girl with long dark hair, wearing a pink baseball cap and a purple floral shirt, is shown in profile, blowing bubbles. The background is a bright, sunlit outdoor setting with many colorful bubbles floating in the air. The text "學完囉！" is on the left, "前往" is in the middle, and "下一章節" is on the right, all in white. A white arrow icon points from "前往" to "下一章節".

學完囉！
前往 ➡ 下一章節

右圖是製作 12 顆粽子的部分食譜，
根據右圖回答下列問題：

解 (1) 製作 12 顆粽子所需的沙拉油重量：醬

油重量為 15 : 6 ，

5

比值為 $\frac{5}{2}$ 。

(2) 沙拉油重量是醬油重量的 $\frac{5}{2}$ 倍。

(3) 醬油重量是沙拉油重量的 $\frac{2}{5}$ 倍。

製作 12 顆粽子



粽子

米飯	長糯米	600	公克
	高湯	120	公克
調味料	沙拉油	15	公克
	鹽	3	公克
	醬油	6	公克



某次籃球比賽，阿叻投 10 球進 7 球，阿澄投 20 球進 14 球，下列哪一個敘述是錯誤的？

- (A) 阿叻命中數與投籃數的比為 7 : 10
- (B) 阿澄命中數與投籃數的比值為 $\frac{14}{20}$
- (C) 後來阿叻又多投了 10 球，如果要將命中率提高為 8 成，則他必須在這 10 球中投進 9 球
- (D) 因為阿叻只投進 7 球，而阿澄投進 14 球，所以阿澄的命中率比較高

解

(D)



寫出下列各比的比值，並以最簡分數表示。

(1) $(-4) : 8$

(2) $0.5 : (-2.5)$

(3) $(-\frac{1}{3}) : (-\frac{5}{6})$

解

(1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{5}$ (3) $\frac{2}{5}$



下列四個敘述甲與乙關係的選項中，哪一個與其他三個不同？

【91 年第一次基本學測】

- (A) 甲是乙的 $\frac{b}{a}$ 倍
- (B) 甲：乙 = a ： b
- (C) 甲的 a 倍等於乙的 b 倍
- (D) 甲：乙的比值為 $\frac{b}{a}$

解

(B)



下列四個選項中，哪兩個選項的比值相等？

(A) $30 : 50$

(B) $33 : 55$

(C) $60 : 36$

(D) $40 : 50$

解 (A)、(B)



下列哪一個選項與 $12 : 15$ 不是相等的比？

- (A) $4 : 5$ (B) $5 : 4$ (C) $1 : \frac{5}{4}$ (D) $\frac{4}{5} : 1$

解 (B)



在下列各□中填入適當的數值。

$$(1) 3 : (-5) = \square : 11$$

$$(2) \frac{1}{2} : \frac{1}{5} = (-2) : \square$$

$$(3) 6 : 7 = (-1) : \square = 8 : \square$$

解 (1) $-\frac{33}{5}$ (2) $-\frac{4}{5}$ (3) $-\frac{7}{6}, \frac{28}{3}$



將下列各比化為最簡整數比。

(1) $121 : 77$

(2) $49 : (-35)$

(3) $(-25) : (-30)$

解 (1) $11 : 7$ (2) $7 : (-5)$ (3) $5 : 6$



求下列各比例式中的 x 值。

$$(1) 5 : x = 4 : 9$$

$$(2) 3 : 8 = x : \frac{1}{2}$$

$$(3) \frac{x}{3} : 7 = 2 : \frac{3}{2}$$

$$(4) 8 : \frac{5}{2}x = 4 : 5$$

解

$$(1) x = \frac{45}{4}$$

$$(2) x = \frac{3}{16}$$

$$(3) x = 28$$

$$(4) x = 4$$



求下列各比例式中的 x 值。

$$(1) 4 : 8 = 12 : (x - 4)$$

$$(2) (2x - 1) : 3 = (x + 4) : 1$$

$$(3) 3(x + 1) : 2(x - 4) = 3 : 4$$

$$(4) (x + 1) : (x - 1) = 5 : 4$$

解

$$(1) x = 28$$

$$(2) x = -13$$

$$(3) x = -6$$

$$(4) x = 9$$



有兩數 x 、 y ，已知 $x : y = 7 : 6$ ，且 $2y - x = 30$ ，則 x 、 y 的值分別為多少？

解

$$x = 42, y = 36$$



有兩數 a 、 b ，已知 $a : b = 4 : 9$ ，且 $2a + b = 204$ ，則 a 、 b 的值分別為多少？

解

$$a = 48, b = 108$$



設 x 、 y 皆不為 0，且 $4x=9y$ ，求下列各比的比值。

(1) $x : y$

(2) $3x : 2y$

解 (1) $\frac{9}{4}$ (2) $\frac{27}{8}$



設 x 、 y 皆不為 0，且 $3x=5y$ ，求下列各比的比值。

(1) $2x : 3y$

(2) $(2x + 3y) : (4x - y)$

解 (1) $\frac{10}{9}$ (2) $\frac{19}{17}$



設 $(2x + 3y) : (x - 2y) = 8 : (-3)$ ，計算下列各式。

解

(1) $x : y = \underline{1} : \underline{2}$ 。

(2) $(4x + 3y) : (4x - 3y)$ 的比值為 $\underline{-5}$ 。



設 $(x+2y) : (x-2y) = 5 : (-3)$ ，計算下列各式。

解

$$(1) x : y = \underline{1} : \underline{2}。$$

$$(2) \frac{2x-2y}{2x+y} = \underline{-\frac{1}{2}}。$$



已知某國中七年甲班男生人數的 3 倍和女生人數的 5 倍一樣多，則：

解

(1) 男生人數：女生人數 = 5 : 3。

(2) 承(1)，若全班人數共 48 人，則男生有 30 人、女生有 18 人。



教室中原有男生、女生的人數比為 $3:2$ ，下課後走掉 7 個男生和 2 個女生，結果男生、女生人數比變成 $5:4$ ，則教室中原有男生、女生各多少人？

解

男生原有 27 人

女生原有 18 人



某校一年級與二年級的學生人數比為 3 : 2，已知一年級的學生中，有 40% 視力良好，二年級的學生中，有 30% 視力良好。請問一、二年級所有學生中有多少比例的學生視力良好？

【92 年第一次基本學測】

- (A) 18% (B) 36% (C) 57% (D) 70%

解 (B)



新樹公園的平面圖比例尺為 $1:150$ ，若在平面圖上，涼亭的長為 2.4 公分，寬為 2 公分，則涼亭實際的長、寬各為多少公尺？

解 涼亭實際的長為 3.6 公尺、寬為 3 公尺



某一遊樂園中的恐龍樂園，在園區導覽地圖上以 $1:25$ 的比例尺縮小，則大小為 2400 平方公分的恐龍樂園面積，實際的面積為多少平方公尺？

解

150 平方公尺



將一條 120 公分的繩子以 5 : 7 的比例剪成兩段，分別圍出兩個正方形，則小正方形與大正方形的邊長比值為多少？

解

$\frac{5}{7}$



將一條 90 公分的繩子以 4 : 5 的比例剪成兩段，分別圍出兩個正方形，則小正方形與大正方形的周長比值和面積比值各是多少？

解 周長比值為 $\frac{4}{5}$ ，面積比值為 $\frac{16}{25}$

