國中數學 挑戰資優生 第 1 回

主題 整數的四則運算

學習指標	＊能認識相反數及其在數線上的相對位置。 ＊能在脫離數線的情況下，判斷正、負數的大小。 ＊能舉例說明數量大小關係的性質：三一律與遞移律。 ＊能用絕對值的符號表示數線上兩點間的距離。

1. 已知 a、b 皆是不為 0 的實數，則下列敘述何者正確？答：＿(B)＿。

(A) $|a|>b \Rightarrow a^2>b^2$　(B) $a>|b| \Rightarrow a^2>b^2$

(C) $a>b \Rightarrow a^2>b^2$　(D) $a\neq b \Rightarrow a^2\neq b^2$

(A) $|a|>b$，可得①$a>0>b$、②$a>b>0$、③$-a>b>0$、④$0>b>a$、⑤$0>a>b$ 五種可能，
　則①$a>0>b$、⑤$0>a>b$ 時，$a^2>b^2$ 不一定成立
(B) $a>|b|$，可得①$a>b>0$、②$a>-b>0$ 兩種可能，
　則①$a>b>0$、②$a>-b>0$ 時，$a^2>b^2$ 皆成立
(C) $a>b$，可得①$a>b>0$、②$a>0>b$、③$0>a>b$ 三種可能，
　則②$a>0>b$、③$0>a>b$ 時，$a^2>b^2$ 不一定成立
(D) $a\neq b$，可得①$a=-b$、②$a\neq -b$ 兩種可能，
　則①$a=-b$ 時，$a^2\neq b^2$ 不成立
故選(B)

2. 已知 a、b 均為整數，若 $5|a-2|+|b+3|=7$，請列出(a,b)的所有情況，以數對表示：
＿(2 , 4)、(2 , －10)、(3 , －1)、(3 , －5)、(1 , －1)、(1 , －5)＿。

(1) 令 $|a-2|=0$，$|b+3|=7$
　則 $a=2$；$b=4$ 或 -10
(2) 令 $|a-2|=1$，$|b+3|=2$
　則 $a=3$ 或 1；$b=-1$ 或 -5
　由(1)、(2)可知(a,b)的所有情況為
　(2 , 4)、(2，－10)、(3，－1)、(3，－5)、(1，－1)、(1，－5)

3. 若甲×576＝2080，則(5－甲)×576－甲×57.6＝＿592＿。

原式＝5×576－甲×576－甲×57.6
　　＝2880－2080－208
　　＝592

指數律與科學記號

學習指標	
學習指標	＊能理解底數為整數且指數為非負整數的運算。 ＊能理解底數為整數且指數為負整數的運算。 ＊能以 10 為底的指數表達自然科學領域常用的長度、重量、容積等單位，如奈米、微米、公分或厘米等。

1. 若$(79^8+79^7)\div 80=79^m$，則 $m=$ ___7___。

左式$=(79\times 79^7+79^7)\div 80$

$=80\times 79^7\div 80$

$=79^7$

故 $m=7$

2. 若 $4^8+4^8+4^8+4^8=2^m$，則 $m=$ ___18___。

左式$=4\times 4^8$

$=4^9$

$=(2^2)^9$

$=2^{18}$

故 $m=18$

3. 若$(4^{22}-2^{40})\div3=m\times4^{20}$，則 $m=$ ___5___ 。

左式$=[4^{22}-(2^2)^{20}]\div3$

$=(4^{22}-4^{20})\div3$

$=(4^2\times4^{20}-4^{20})\div3$

$=(15\times4^{20})\div3$

$=5\times4^{20}$

故 $m=5$

4. 若 $3^a=5$、$5^b=7$、$7^c=9$，則 $abc=$？答：___(B)___ 。

(A) 1　(B) 2　(C) $\frac{7}{9}$　(D) $\frac{9}{7}$

$5=3^a$ 代入 $7=5^b$，得 $7=(3^a)^b=3^{ab}$

$7=3^{ab}$ 代入 $9=7^c$，得 $9=(3^{ab})^c=3^{abc}$

$\because 3^2=9$，$\therefore abc=2$

故選(B)

5. 已知 x 為一個七位數，今將小數 $0.00x$ 以科學記號寫成 $a\times10^b$ 的形式時，則下列對 a 和 b 的描述哪一個正確？答：___(A)___ 。

(A) $a=\frac{x}{10^6}$　(B) $a=\frac{x}{10^8}$　(C) $b=-6$　(D) $b=-2$

$\because x$ 為一個七位數

$\therefore a=x\times10^{-6}=\frac{x}{10^6}$

又 $0.00x=a\times10^b$

$\therefore b=-3$

故選(A)

因數與倍數

學習指標	＊辨識質數與合數並能判別 2、5、4、3、9、11 的倍數。 ＊辨識一正整數的質因數並能做質因數分解。 ＊能辨識兩正整數是否互質。

1. 景陽自 12～18 的整數中，任意挑選三數，若此三數的乘積為 2496，則此三數為 12、13、16 。

$2496=2^6\times3\times13$

$=2^4\times(2^2\times3)\times13$

$=16\times12\times13$

故三數為 12、13、16

$$\begin{array}{r|r} 2 & 2496 \\ 2 & 1248 \\ 2 & 624 \\ 2 & 312 \\ 2 & 156 \\ 2 & 78 \\ 3 & 39 \\ & 13 \end{array}$$

2. 請問介於 10 與 20 之間所有分母為 12 的最簡分數，它們的總和為多少？答： (D) 。

(A) 51　(B) 450　(C) 540　(D) 600

所求為介於 $\frac{120}{12}$～$\frac{240}{12}$ 的最簡分數之和，先找出不為最簡分數的分數和：

分子有因數 2：不為最簡分數的共有 61 個，和為$\frac{(120+240)\times61}{2\times12}$

分子有因數 3：不為最簡分數的共有 41 個，和為$\frac{(120+240)\times41}{2\times12}$

分子有因數 6：不為最簡分數的共有 21 個，和為$\frac{(120+240)\times21}{2\times12}$

故所求為$\frac{(120+240)\times121}{2\times12}-\frac{(120+240)\times61}{2\times12}-\frac{(120+240)\times41}{2\times12}+\frac{(120+240)\times21}{2\times12}$

$=15\times(121-61-41+21)=15\times40=600$

故選(D)

3. 有五個質數相乘後得到的積是六位數字，且這六個阿拉伯數字皆相同，請找出這個阿拉伯數字是多少？答：____(A)____。

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

設此六位數字為 $a\times111111$
(a 為 1～9 之正整數)
$a\times111111=3\times7\times11\times13\times37\times a$
若 $a\neq1$
則此五個數中必有一數不為質數
$\therefore a=1$
此五個質數 3、7、11、13、37 的乘積為 111111
故選(A)

$$\begin{array}{r|l} 3 & 111111 \\ \hline 37 & 37037 \\ \hline 7 & 1001 \\ \hline 11 & 143 \\ \hline & 13 \end{array}$$

4. 有兩個正整數 a、b 皆為三位數，且 $a\leq b$，若 a 和 b 的乘積為五位數，且此五位數的五個數字皆相同。滿足上述條件的數對(a , b)共有多少組？答：____(C)____。

(A) 7　　(B) 9　　(C) 10　　(D) 12

設此五位數字為 $n\times11111$
(n 為 1～9 之正整數)
$n\times11111=41\times271\times n$
$n=1$、2 不合
$n=3$ 時可得$(a , b)=(123 , 271)$
$n=4$ 時可得$(a , b)=(164 , 271)$
$n=5$ 時可得$(a , b)=(205 , 271)$
$n=6$ 時可得$(a , b)=(123 , 542)$或$(246 , 271)$
$n=7$ 時可得$(a , b)=(271 , 287)$
$n=8$ 時可得$(a , b)=(164 , 542)$或$(271 , 328)$
$n=9$ 時可得$(a , b)=(123 , 813)$或$(271 , 369)$
共有 10 組，故選(C)

$$\begin{array}{r|l} 41 & 11111 \\ \hline & 271 \end{array}$$

5. 用 1、2、3、4、5、6 這六個數組成一個六位數 $abcdef$，其中不同的字母代表 1～6 不同的數字。若要求二位數 ab 是 2 的倍數，三位數 abc 是 3 的倍數，四位數 $abcd$ 是 4 的倍數，五位數 $abcde$ 是 5 的倍數，六位數 $abcdef$ 是 6 的倍數，試問所有這樣的六位數有哪幾個？請一一列出。

$\because abcde$ 是 5 的倍數，$\therefore e$ 是 5
$\because ab$ 是 2 的倍數，$abcd$ 是 4 的倍數，$abcdef$ 是 6 的倍數，
$\therefore b$、d、f 可能是 2、4、6
$\therefore a$、c 兩數為 1、3 或 3、1
$\because abc$ 為 3 的倍數，$\therefore a+b+c$ 為 3 的倍數
又 $a+c=4$，$\therefore b=2$
$\because abcd$ 是 4 的倍數，$\therefore cd$ 可能是 16、36
$\therefore d$ 是 6，故 f 是 4
可得六位數為 123654 或 321654

主題 分數的四則運算

學習指標	＊能判別兩數加、減、乘、除的正負結果並算出其值。 ＊能理解負數的特性並熟練正負數(含小數、分數)的四則運算。

1. 已知 $\frac{1}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$，$\frac{1}{30}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$，$\frac{1}{42}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$，…，由此推算 $\frac{1}{11}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}=$ ___$\frac{1}{7}$___ 。

原式 $=\frac{1}{11}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{10\times11}$

$=\cancel{\frac{1}{11}}+(\frac{1}{7}-\cancel{\frac{1}{8}})+(\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{9}})+(\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{10}})+(\cancel{\frac{1}{10}}-\cancel{\frac{1}{11}})$

$=\frac{1}{7}$

2. 計算 $(2-\frac{1}{2})\times(3-\frac{1}{3})\times(4-\frac{1}{4})\times(5-\frac{1}{5})\times(6-\frac{1}{6})\times(7-\frac{1}{7})\times\frac{1}{8}$ 之值為下列哪一個選項？答：___(B)___ 。

(A) $2\times3\times4\times5\times6$　　(B) $3\times4\times5\times6$

(C) $3\times4\times5\times6\times7$　　(D) $2\times3\times4\times5\times6\times7$

原式 $=\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{8}}{\cancel{3}}\times\frac{15}{\cancel{4}}\times\frac{24}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{35}}{\cancel{6}}\times\frac{\cancel{48}}{\cancel{7}}\times\frac{1}{\cancel{8}}$

$=15\times24=3\times4\times5\times6$

故選(B)

3. 若 $A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\cdots\times\frac{99}{100}$，$B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\cdots\times\frac{100}{101}$，則下列何者正確？

答：___(B)___ 。

(A) $AB=\frac{1}{100}$　(B) $B>\frac{1}{11}$　(C) $A>\frac{1}{10}$　(D) $B<A$

(A) $AB=[(\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\cdots\cdots\times\frac{99}{98})\times\frac{1}{100}]\times[(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\cdots\times\frac{98}{99})\times\frac{100}{101}]=\frac{1}{101}$

(B) $\because\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$，……，$\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$，$\therefore A<B$

又 $A>0$，$B>0$，故 $A^2<AB<B^2$

由 $B^2>AB=\frac{1}{101}>\frac{1}{121}\Rightarrow B>\frac{1}{11}$

(C) 由 $A^2<AB=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}\Rightarrow A<\frac{1}{10}$

(D) 由(B)知 $B>A$，故選(B)

4. 將 $\frac{87654}{87655}$、$\frac{8765}{8766}$、$\frac{876}{877}$、$\frac{87}{88}$ 這四個數由大而小排列出來。

$\frac{87654}{87655}=1-\frac{1}{87655}$，$\frac{8765}{8766}=1-\frac{1}{8766}$，

$\frac{876}{877}=1-\frac{1}{877}$，$\frac{87}{88}=1-\frac{1}{88}$

$\because \frac{1}{87655}<\frac{1}{8766}<\frac{1}{877}<\frac{1}{88}$

$\therefore 1-\frac{1}{87655}>1-\frac{1}{8766}>1-\frac{1}{877}>1-\frac{1}{88}$

即 $\frac{87654}{87655}>\frac{8765}{8766}>\frac{876}{877}>\frac{87}{88}$

5. 已知有七個數，從小排到大的第三個數是 $\frac{11}{26}$，若 $0.\overline{42}$、$\frac{3}{7}$、$\frac{11}{26}$、$0.42\overline{4}$、$\frac{26}{61}$ 是其中的五個數，求從大排到小的第三個數？

$0.\overline{42}=0.42424242\cdots$

$\frac{3}{7}=0.4285\cdots$，$\frac{11}{26}=0.423\cdots$

$0.42\overline{4}=0.424444444\cdots$

$\frac{26}{61}=0.426\cdots$

故 $\frac{3}{7}>\frac{26}{61}>0.42\overline{4}>0.\overline{42}>\frac{11}{26}$

因為由小而大排列第三個數為 $\frac{11}{26}$

故可知另外兩數皆比 $\frac{11}{26}$ 小

因此若由大而小排列第三個數應為 $0.42\overline{4}$

6. 有 30 個數：1.65、$1.65+\frac{1}{30}$、$1.65+\frac{2}{30}$、……、$1.65+\frac{28}{30}$、$1.65+\frac{29}{30}$。如果取每個數的整數部分，並將這些數相加，那麼其和是多少？

因為 $2-1.65=0.35=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}=\frac{7\times1.5}{30}=\frac{10.5}{30}$

所以 1.65、$1.65+\frac{1}{30}$、……、$1.65+\frac{10}{30}$，這 11 個數其整數部分皆為 1

$1.65+\frac{11}{30}$、$1.65+\frac{12}{30}$、……、$1.65+\frac{29}{30}$，這 19 個數其整數部分皆為 2

因此整數部分和為 $1\times11+2\times19=49$

7. 計算 $99\frac{3}{4}+199\frac{3}{4}+2999\frac{3}{4}+39999\frac{3}{4}+1$ 之值。

原式 $=(99\frac{3}{4}+\frac{1}{4})+(199\frac{3}{4}+\frac{1}{4})+(2999\frac{3}{4}+\frac{1}{4})+(39999\frac{3}{4}+\frac{1}{4})$

$=100+200+3000+40000$

$=43300$

8. 計算 $(1+\frac{7}{33})+(1+\frac{7}{33}\times 2)+(1+\frac{7}{33}\times 3)+\cdots\cdots+(1+\frac{7}{33}\times 10)+(1+\frac{7}{33}\times 11)$ 之值。

原式 $=(1+1+\cdots\cdots+1)+\frac{7}{33}\times(1+2+3+\cdots\cdots+10+11)$

$=11+\frac{7}{33}\times(1+11)\times\frac{11}{2}$

$=11+14=25$

9. 已知 $A=\dfrac{1}{\frac{1}{1980}+\frac{1}{1981}+\cdots\cdots+\frac{1}{1997}}$，求 A 的整數部分是多少？

$\frac{1}{1980}+\frac{1}{1981}+\cdots+\frac{1}{1997}>\frac{1}{1997}+\frac{1}{1997}+\cdots+\frac{1}{1997}=\frac{18}{1997}$

$\frac{1}{1980}+\frac{1}{1981}+\cdots+\frac{1}{1997}<\frac{1}{1980}+\frac{1}{1980}+\cdots+\frac{1}{1980}=\frac{18}{1980}$

因為 $A=\dfrac{1}{\frac{1}{1980}+\frac{1}{1981}+\cdots+\frac{1}{1997}}$

所以 $\frac{18}{1997}<\frac{1}{A}<\frac{18}{1980}$，故 $\frac{1980}{18}<A<\frac{1997}{18}$

也就是 $110<A<110\frac{17}{18}$

因此，A 的整數部分是 110

10. 計算 $9\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2-1\dfrac{1}{2}}{2\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{1+1\dfrac{1}{2}}}$ 之值。

$$9\frac{2}{3}\times\frac{2-1\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}+\frac{3}{1+1\frac{1}{2}}}=\frac{29}{3}\times\frac{2-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}+\frac{3}{\frac{5}{2}}}=\frac{29}{3}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}+\frac{6}{5}}=\frac{29}{3}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{37}{10}}=\frac{29}{3}\times\frac{5}{37}=\frac{145}{111}$$

11. 計算 $\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}}$ 之值。

$$\frac{1}{4-\frac{1}{3+\frac{1}{2-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}=\frac{1}{4-\frac{1}{3+\frac{1}{2-\frac{2}{3}}}}=\frac{1}{4-\frac{1}{3+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{4-\frac{4}{15}}=\frac{15}{56}$$

12. 若 $\dfrac{5}{13}=\dfrac{1}{甲+\dfrac{1}{乙+\dfrac{1}{丙+\dfrac{1}{丁}}}}$，則甲、乙、丙、丁各為多少？

$$\frac{5}{13}=\frac{1}{\frac{13}{5}}=\frac{1}{2+\frac{3}{5}}=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{3}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$$

$\Rightarrow$ 甲$=2$，乙$=1$，丙$=1$，丁$=2$

學習指標	＊能嘗試以代入法或枚舉法求解，並檢驗解的合理性。 ＊能由具體情境中列出一元一次方程式，並理解其解的意義。 ＊能以等量公理來解一元一次方程式，並作驗算。 ＊能利用移項法則來解一元一次方程式，並作驗算。

1. 解方程式$|x|+|x-1|=3$，$x=$？

當$x<0$時，原方程式化為$-x-x+1=3\Rightarrow x=-1$
當$0\leqq x<1$時，原方程式化為$x-x+1=3\Rightarrow$原方程式無解
當$x\geqq 1$時，原方程式化為$x+x-1=3\Rightarrow x=2$
綜合以上，原方程式的解為$x=-1$或$x=2$

2. 解方程式$|x+3|-|x-1|=x+1$，$x=$？

當$x<-3$時，$-(x+3)+(x-1)=x+1\Rightarrow x=-5$
當$-3\leqq x<1$時，$x+3+x-1=x+1\Rightarrow x=-1$
當$x\geqq 1$時，$x+3-(x-1)=x+1\Rightarrow x=3$

3. 方程式$||x-2|+1|=2x+1$的解有多少個？

由於$|x-2|+1>0$，原方程式可化為：
$|x-2|+1=2x+1$，$|x-2|=2x$
當$x<2$時，$-(x-2)=2x\Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$
當$x\geqq 2$時，$x-2=2x\Rightarrow x=-2$，矛盾
故原方程式的解的個數為 1 個

4. 解 x 的方程式 $\dfrac{x-b-c}{a}+\dfrac{x-c-a}{b}+\dfrac{x-a-b}{c}=3$，其中 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\neq 0$，$x=$？

原方程式可化為$(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})x=\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}+3$，

而 $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}+3=(\dfrac{b+c}{a}+1)+(\dfrac{c+a}{b}+1)+(\dfrac{a+b}{c}+1)$

$$=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$$

$$=(a+b+c)\cdot(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

又 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\neq 0$，故 $x=a+b+c$

5. 若 $abc=1$，解 x 的方程式 $\dfrac{x}{1+a+ab}+\dfrac{x}{1+b+bc}+\dfrac{x}{1+c+ca}=2001$，$x=$？

因為 $abc=1$，

所以$\dfrac{1}{1+a+ab}+\dfrac{1}{1+b+bc}+\dfrac{1}{1+c+ca}=\dfrac{1}{1+a+ab}+\dfrac{a}{a(1+b+bc)}+\dfrac{ab}{ab(1+c+ca)}$

$$=\frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{1+a+ab}+\frac{ab}{1+a+ab}$$

$$=\frac{1+a+ab}{1+a+ab}=1$$

原方程式的解為 $x=2001$

6. 建仔在某場球賽後，準備將他的獎金依次按照下述的方法分給他的隊友：第一個隊友分 100 元和所剩獎金的 $\frac{1}{10}$；第二個隊友分 200 元和所剩獎金的 $\frac{1}{10}$；第三個隊友分 300 元和所剩獎金的 $\frac{1}{10}$；……，依此類推，最後發現獎金剛好分完，而且每個隊友又分得一樣多錢，那麼建仔共有幾個隊友(當然建仔不算在內)？又每個隊友分得多少錢？

設建仔有獎金 x 元

則第一個隊友分得 $100+(x-100)\cdot\frac{1}{10}=\frac{x}{10}+90$

第二個隊友分得 $200+(x-\frac{x}{10}-90-200)\cdot\frac{1}{10}=171+\frac{9}{100}x$

$\frac{x}{10}+90=171+\frac{9}{100}x \Rightarrow x=8100$

故第一個隊友分得 $\frac{1}{10}\times 8100+90=900$

則共有隊友 $\frac{8100}{900}=9$ 人，每個隊友可分得 900 元

7. 小明從家到學校時，前一半路程步行，後一半路程乘車；他從學校回家時，前 $\frac{1}{3}$ 時間乘車，後 $\frac{2}{3}$ 時間步行。結果去學校的時間比回家所用的時間多 20 分鐘。已知小明步行每分鐘走 80 公尺，乘車每分鐘行駛 240 公尺，則小明從家到學校的路程是多少公里？

設小明家到學校的路程是 s 公尺

則小明去學校用的時間是：$\frac{s}{2}\div 80+\frac{s}{2}\div 240=\frac{s}{120}$ (分鐘)

回家用$(\frac{s}{120}-20)$分鐘

根據回家的情況可列方程式：

$240\times\frac{1}{3}(\frac{s}{120}-20)+80\times\frac{2}{3}(\frac{s}{120}-20)=s$

解得 $s=24000$(公尺)＝24 公里

學習指標	＊能嘗試以代入法或枚舉法求解，並檢驗解的合理性。 ＊能由命題中用 x、y 等符號列出生活中的變量，並列出算式。 ＊能由具體情境中列出二元一次方程式，並理解其解的意義。 ＊能由具體情境中列出二元一次聯立方程式，並理解其解的意義。 ＊能熟練使用消去法解二元一次方程式。

1. 若$\begin{cases}\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3y}=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=2\end{cases}$，則 $x+y=$？答：____(A)____。

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

$\begin{cases}\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3y}=\dfrac{2}{3}\cdots\cdots①\\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=2\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$

①x6＋②：$\dfrac{6}{x}=6\Rightarrow x=1$

代入②：$3-\dfrac{2}{y}=2\Rightarrow y=2$

故 $x+y=1+2=3$，故選(A)

2. 聯立方程式$\begin{cases}ax+by=2c\cdots\cdots①\\ cz+ax=2b\cdots\cdots②\\ by+cz=2a\cdots\cdots③\end{cases}$(其中 a、b、c 均為常數且不為 0)的解為何？

由①＋②＋③得 $ax+by+cz=a+b+c\cdots\cdots④$

由④－①得 $cz=a+b-c$，由 $c\neq 0$ 得 $z=\dfrac{a+b-c}{c}$

同理可得 $y=\dfrac{a-b+c}{b}$，$x=\dfrac{-a+b+c}{a}$

所以方程組的解為

$x=\dfrac{-a+b+c}{a}$，$y=\dfrac{a-b+c}{b}$，$z=\dfrac{a+b-c}{c}$

3. 有 30 個 5 克砝碼和 30 個 3 克砝碼，想在等臂天平上秤出 1 克的質量，若左邊限用 5 克砝碼，右邊限用 3 克砝碼，則共有____12____種不同的方法。

設 5 克砝碼用去了 x 個，3 克砝碼用去了 y 個

(1) $5x>3y$，$5x-3y=1$

x	2	5	8	11	14	17
y	3	8	13	18	23	28

，共 6 種

(2) $5x<3y$，$3y-5x=1$

x	1	4	7	10	13	16
y	2	7	12	17	22	27

，共 6 種

所以一共有 $6+6=12$ 種

國中數學 主題

挑戰資優生 第 7 回

比與比例式

學習指標	＊能熟練比例式的基本運算。 ＊能理解連比和連比例式的意義。 ＊能熟練比例式的應用。

1. 設 a、b、c、d 四數滿足 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{d}{c}$，且 $a+b+c=4(b+c+d)$，則 $\dfrac{d}{a}=$？

設 $b=ar$，$c=br$，$d=cr$

則 $a+b+c=4(b+c+d)$

$\Rightarrow a+b+c=4(ar+br+cr)\Rightarrow r=\dfrac{1}{4}$

$\therefore b=\dfrac{a}{4}$，$c=\dfrac{a}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{a}{16}$，$d=\dfrac{a}{16}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{a}{64}$

故 $\dfrac{d}{a}=\dfrac{1}{64}$

2. 甲、乙兩列車分別從 A、B 兩站同時相向開出，已知甲車速度與乙車速度的比為 3：2，C 站在 A、B 兩站之間，若甲、乙兩列車到達 C 站的時間分別是上午 5 時和下午 3 時，則甲、乙兩車幾點相遇？

設兩車在 D 處相遇，如圖所示：

上午 5 時甲到 C 站，乙到達 M，則乙由 M 到 C 需 $15-5=10$(小時)，相遇點 D 應在 M 與 C 之間，

對於同一段路程、速度與時間成反比，

也就是甲從 C 到 D 的時間與乙由 D 到 C 用的時間之比 2：3(或 4：6 或 6：9⋯)，調整一下，只有 $6+4=10$，

也就是甲由 C 到 D 用 4 小時，這時乙由 M 到 D 也是 4 小時，再用 6 小時乙正好由 D 到 C，

那麼甲、乙車相遇時間是上午 $5+4=9$(時)

3. 快慢兩列車的長分別是 150 公尺和 200 公尺，它們相向行駛在平行軌道上，若坐在慢車上的人見快車駛過窗口的時間是 6 秒，則坐在快車上的人見慢車駛過窗口所用的時間是多少秒鐘？

設快車、慢車的速率分別為 V_1、V_2

則 $150=(V_1+V_2)\times 6 \Rightarrow V_1+V_2=25$

又設快車上的人見慢車駛過窗口的時間是 t 秒

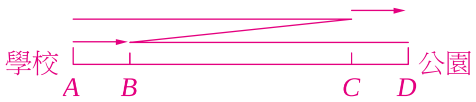
$\Rightarrow 200=(V_1+V_2)\times t \Rightarrow 200=25t$，$t=8$

4. 甲班與乙班學生同時從學校出發去某公園，甲班步行的平均速率是每小時 4 公里，乙班步行的平均速率是每小時 3 公里，學校有一輛校車，它的平均速率是每小時 48 公里，這輛校車恰好能坐一個班的學生，為了使兩個班學生在最短的時間內同時到達，那麼甲班學生與乙班學生需要步行的路程之比是多少？

校車平均速率是甲班步行平行速率的 $48\div 4=12$ 倍，是乙班步行速率的 $48\div 3=16$ 倍。

我們不妨設校車先送甲班到 C 點後再返回，在 B 點接到乙班往公園。

如圖所示：



甲班行走的路程為 $\overline{CD}$，乙班行走的路程為 $\overline{AB}$。

甲班在行走路程為 $\overline{CD}$ 這路程時，校車行駛了 $(2\overline{CB}+\overline{CD})$，

由於校車平均速率是甲班步行平均速率的 12 倍，所以 $2\overline{CB}+\overline{CD}=12\overline{CD}$，$2\overline{CB}=11\overline{CD}$。

乙班在行走 $\overline{AB}$ 這段路程時，校車行駛了 $(2\overline{CB}+\overline{AB})$，

由於校車平均速率是乙班步行速率的 16 倍，所以 $2\overline{CB}+\overline{AB}=16\overline{AB}$，$2\overline{CB}=15\overline{AB}$。

這樣 $11\overline{CD}=15\overline{AB}$，$\overline{CD}:\overline{AB}=15:11$，

即甲班學生與乙班學生需要步行的路程之比是 15：11。

學習指標	＊能由具體情境中列出一元一次不等式。 ＊能利用移項法則在數線上找出一元一次不等式的解。

1. 若只有 1 個正整數介於分數 $\frac{49}{12}$ 與 $\frac{49+n}{12+n}$ 之間，則正整數 n 的所有可能值之和是多少？

由於 $\frac{49+n}{12+n}<\frac{49}{12}$，且 $4<\frac{49}{12}<5$

由題意可得：$3<\frac{49+n}{12+n}<4$，解得 $\frac{1}{3}<n<\frac{13}{2}$

由於 n 為正整數，則 $n=1，2，3，4，5，6$

且 $1+2+3+4+5+6=\frac{6\times(6+1)}{2}=21$

2. 已知 a、b、c、d 為不同正整數，且均含質因數 5，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{32}{225}$，

求 $a+b+c+d$ 的值。

設 $a=5a_1$，$b=5b_1$，$c=5c_1$，$d=5d_1$

則有 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}+\frac{1}{c_1}+\frac{1}{d_1}=\frac{32}{45}$，其中 a_1、b_1、c_1、d_1 為 45 的因數

且設 $a_1>b_1>c_1>d_1$

$\frac{4}{d_1}>\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}+\frac{1}{c_1}+\frac{1}{d_1}$

所以 $\frac{4}{d_1}>\frac{32}{45}$，得 $d_1<5.625$

又 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}+\frac{1}{c_1}+\frac{1}{d_1}=\frac{32}{45}$

$\therefore d_1\neq 1$

得 $d_1=3$

同理 $c_1=5$，$b_1=9$，$a_1=15$

即 $d=15$，$c=25$，$b=45$，$a=75$

$a+b+c+d=75+45+25+15=160$

學習指標	＊能熟練二次式的乘法公式，如$(a+b)^2$、$(a-b)^2$、$(a+b)(a-b)$、$(a+b)(c+d)$。 ＊能利用乘法公式進行簡單速算。

1. 若 $a\geq -1$，$b\geq 2$，$c\geq -1$ 且 $a+b+c+3=2(\sqrt{a+1}+\sqrt{b-2}+\sqrt{c+1})$，則 $a^2+b^2+c^2=$？答：(C)。

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

$a+b+c+3=2(\sqrt{a+1}+\sqrt{b-2}+\sqrt{c+1})$

$(a+1)+(b-2)+(c+1)+3=2(\sqrt{a+1}+\sqrt{b-2}+\sqrt{c+1})$

$[(a+1)-2\sqrt{a+1}+1]+[(b-2)-2\sqrt{b-2}+1]+[(c+1)-2\sqrt{c+1}+1]=0$

$(\sqrt{a+1}-1)^2+(\sqrt{b-2}-1)^2+(\sqrt{c+1}-1)^2=0$

$\Rightarrow\sqrt{a+1}=1$，$\sqrt{b-2}=1$，$\sqrt{c+1}=1\Rightarrow a=0$，$b=3$，$c=0$

得 $a^2+b^2+c^2=0+9+0=9$，故選(C)

2. 已知 $a=(2016+\frac{1}{2016})(2017+\frac{1}{2017})$，$b=(\sqrt{2016\times2017}+\frac{1}{\sqrt{2016\times2017}})^2$，$c=(\frac{2016+2017}{2}+\frac{2}{2016+2017})^2$；則下列何者正確？答：(C)。

(A) $a>b>c$ (B) $b>a>c$ (C) $c>a>b$ (D) $b>c>a$

先比較 a、b 的大小：

$a=(2016+\frac{1}{2016})(2017+\frac{1}{2017})=2016\times2017+\frac{2017}{2016}+\frac{2016}{2017}+\frac{1}{2016\times2017}$

$=2016\times2017+(1+\frac{1}{2016})+(1-\frac{1}{2017})+\frac{1}{2016\times2017}$ $=2016\times2017+2+\frac{2017-2016}{2016\times2017}+\frac{1}{2016\times2017}$

$=2016\times2017+2+\frac{2}{2016\times2017}$

$b=(\sqrt{2016\times2017}+\frac{1}{\sqrt{2016\times2017}})^2=2016\times2017+2+\frac{1}{2016\times2017}$

$\therefore a>b$，再比較 a、c 的大小：

$a=2016\times2017+2+\frac{2}{2016\times2017}$，$c=(\frac{2016+2017}{2}+\frac{2}{2016+2017})^2=(\frac{2016+2017}{2})^2+2+(\frac{2}{2016+2017})^2$

令 $s=2016\times2017$，$t=(\frac{2016+2017}{2})^2$

$a-c=(s-t)+(\frac{2}{s}-\frac{1}{t})=(s-t)+\frac{1}{s}+(\frac{1}{s}-\frac{1}{t})$

$s-t=2016\times2017-(\frac{2016+2017}{2})^2=2016\times(2016+1)-(\frac{2\times2016+1}{2})^2$

$=2016^2+2016-(2016+\frac{1}{2})^2=2016^2+2016-2016^2-2016-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{s}-\frac{1}{t}=\frac{t-s}{st}=-\frac{1}{st}(s-t)=-\frac{1}{st}\times(-\frac{1}{4})=\frac{1}{4st}$

$\therefore a-c=(s-t)+\frac{1}{s}+(\frac{1}{s}-\frac{1}{t})=-\frac{1}{4}+\frac{1}{s}+\frac{1}{4st}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2016\times2017}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2016\times2017}\times(\frac{2}{2016+2017})^2$

$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2016\times2017}+\frac{1}{2016\times2017\times4033^2}<0$

$\therefore a<c$，得 $c>a>b$，故選(C)

國中數學 主題

挑戰資優生

根式的運算

第 10 回

學習指標	
學習指標	＊能理解二次方根的意義。 ＊能理解二次方根最簡式的意義，並做化簡。 ＊能理解二次方根的加、減、乘、除規則。 ＊能理解簡單根式的化簡及有理化。

1. 已知$\sqrt{5}$為 5 的正平方根，且$\sqrt{5}=2.2360679\cdots$，我們稱$\sqrt{5}$的整數部分為 2；如果恰有連續 47 個正整數，它們的正平方根的整數部分均相同，則相同的整數部分為____23____。

$2^2=4$
$3^2=9$) 5
$4^2=16$) 7
$5^2=25$) 9
$6^2=36$) 11
$7^2=49$) 13
⋮
$22^2=484$
$23^2=529$) 45
$24^2=576$) 47

故可得符合題目的 n 必為：

$\sqrt{529}\leqq\sqrt{n}<\sqrt{576}\Rightarrow 23\leqq\sqrt{n}<24$

所以相同的整數部分為 23

2. 已知 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$，且$\sqrt{a}=m+\dfrac{a-b}{2}$，$\sqrt{b}=n-\dfrac{a-b}{2}$，其中 m、n 為有理數，則 $m^2+n^2=$？

$\because\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$

$\therefore(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})=1\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

則$(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

也就是 $a-b=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

已知$\sqrt{a}=m+\dfrac{a-b}{2}$

則 $m=\sqrt{a}-\dfrac{a-b}{2}=\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}=\dfrac{1}{2}$

已知$\sqrt{b}=n-\dfrac{a-b}{2}$

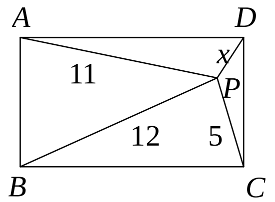
則 $n=\sqrt{b}+\dfrac{a-b}{2}=\sqrt{b}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore m^2+n^2=(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{2}$

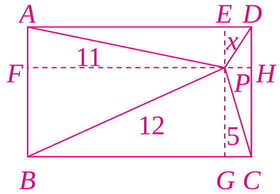
畢氏定理

學習指標	＊能理解畢氏定理，並能介紹其在生活中的應用。 ＊能理解畢氏定理的應用。

1. 如圖，在一矩形內選一點 P，使得 $\overline{PA}=11$，$\overline{PB}=12$，$\overline{PC}=5$，則 $\overline{PD}=$ ___$\sqrt{2}$___ 。



過 P 點分別作 $\overline{PE}\perp\overline{AD}$、$\overline{PF}\perp\overline{AB}$、$\overline{PG}\perp\overline{BC}$、$\overline{PH}\perp\overline{CD}$



設 $\overline{AE}=\overline{PF}=\overline{BG}=a$

$\overline{AF}=\overline{PE}=\overline{DH}=b$

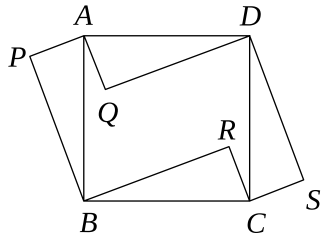
$\overline{BF}=\overline{PG}=\overline{CH}=c$

$\overline{CG}=\overline{PH}=\overline{DE}=d$

則 $11^2+5^2=(a^2+b^2)+(c^2+d^2)=(a^2+c^2)+(b^2+d^2)=12^2+x^2$

$\therefore x^2=121+25-144=2\Rightarrow\overline{PD}=x=\sqrt{2}$

2. 如圖，$ABCD$ 為正方形，$\triangle APB$、$\triangle CRB$、$\triangle CSD$、$\triangle AQD$ 均為相同的直角三角形，而且二股長都是 5 和 12。則 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}=$ ___$17\sqrt{2}$___ 。



$\because\triangle APB$、$\triangle CRB$、$\triangle CSD$、$\triangle AQD$ 的二股長都是 5 和 12

$\therefore\overline{AD}=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

又 $\because\angle DAQ+\angle QAB=90^\circ$，$\therefore\angle QAB+\angle BAP=90^\circ$

$\therefore\overline{PQ}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$，同理 $\overline{RS}=5\sqrt{2}$

過 Q 作直線 $\overleftrightarrow{EF}\perp\overline{AD}$ 於 E，$\overleftrightarrow{EF}\perp\overline{BC}$ 於 F，過 R 作 $\overline{RG}\perp\overline{EF}$ 於 G

$\because\overline{EQ}\perp\overline{AD}$，$\therefore\overline{EQ}=\dfrac{5\times 12}{13}=\dfrac{60}{13}$

同理 $\overline{FG}=\dfrac{60}{13}$，則 $\overline{QG}=13-\dfrac{60}{13}\times 2=\dfrac{49}{13}$

又 $\overline{AE}=\sqrt{5^2-\left(\dfrac{60}{13}\right)^2}=\dfrac{25}{13}$

$\therefore\overline{GR}=13-\dfrac{25}{13}\times 2=\dfrac{119}{13}$

$\Rightarrow\overline{QR}=\sqrt{\left(\dfrac{119}{13}\right)^2+\left(\dfrac{49}{13}\right)^2}=\dfrac{91\sqrt{2}}{13}=7\sqrt{2}$

$\therefore\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}=5\sqrt{2}+7\sqrt{2}+5\sqrt{2}=17\sqrt{2}$

多項式與因式分解

學習指標	＊能熟練多項式的四則運算。 ＊能利用提出公因式與分組分解法分解二次多項式。 ＊能利用乘法公式與十字交乘法做因式分解。

1. 把$(x^2-x+1)^6$展開後得 $a_{12}x^{12}+a_{11}x^{11}+a_{10}x^{10}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$，

求 $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}$ 的值。

$(x^2-x+1)^6=a_{12}x^{12}+a_{11}x^{11}+a_{10}x^{10}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$

將 $x=1$ 代入

$\Rightarrow a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{10}+a_{11}+a_{12}=(1^2-1+1)^6=1\cdots\cdots$①

將 $x=-1$ 代入

$\Rightarrow a_0-a_1+a_2-\cdots\cdots+a_{10}-a_{11}+a_{12}=[(-1)^2-(-1)+1]^6=729\cdots\cdots$②

由①＋②：

$2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12})=730$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=365$

2. 若 $1+x+x^2+x^3=0$，求 $1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{2007}$ 的值。

原式$=(1+x+x^2+x^3)+x^4(1+x+x^2+x^3)+x^8(1+x+x^2+x^3)+\cdots\cdots+x^{2004}(1+x+x^2+x^3)$

$=0$

3. 在 240 與 250 之間恰有一個正整數可以整除 $2^{24}-1$，則此數為__241__。

$2^{24}-1=(2^{12})^2-1$

$=(2^{12}+1)(2^{12}-1)$

$=[(2^4)^3+1^3][(2^4)^3-1^3]$

$=(2^4+1)(2^8-2^4+1)(2^4-1)(2^8+2^4+1)$

$=17\times241\times15\times273$

故此數為 241

4. 因式分解：$a^2+4b^2+c^4-4ab-2ac^2+4bc^2-1$。

原式$=(a^2-4ab+4b^2)-(2ac^2-4bc^2)+c^4-1$

$=(a-2b)^2-2(a-2b)c^2+c^4-1$

$=[(a-2b)-c^2]^2-1$

$=(a-2b-c^2+1)(a-2b-c^2-1)$

5. 因式分解：$x^3+9x^2+26x+24$。

$x^3+9x^2+26x+24=(x^3+2x^2)+(7x^2+14x)+(12x+24)$

$=x^2(x+2)+7x(x+2)+12(x+2)$

$=(x+2)(x^2+7x+12)$

$=(x+2)(x+3)(x+4)$

6. 公園裡有兩位老人在聊天，旁邊站著兩個年輕人，老人說：「我們倆年齡的平方差是 195，……。」不等老人說完，年輕人就說：「真巧，我們倆年齡的平方差也是 195。」這時有一對中年夫婦也湊過來說：「真是巧極了，我們倆年齡的平方差也是 195。」試求這三對人的年齡各是多少？

$\because x^2-y^2=195 \Rightarrow (x+y)(x-y)=195=195\text{x}1=65\text{x}3=39\text{x}5=15\text{x}13$

(1) $(x+y)(x-y)=195\text{x}1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=195 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=98 \\ y=97 \end{cases}$

(2) $(x+y)(x-y)=65\text{x}3 \Rightarrow \begin{cases} x+y=65 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=34 \\ y=31 \end{cases}$

(3) $(x+y)(x-y)=39\text{x}5 \Rightarrow \begin{cases} x+y=39 \\ x-y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=22 \\ y=17 \end{cases}$

(4) $(x+y)(x-y)=15\text{x}13 \Rightarrow \begin{cases} x+y=15 \\ x-y=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=14 \\ y=1 \end{cases}$

由上可知：

這一對老人的年齡分別為 98 歲、97 歲

這一對年輕人的年齡分別為 22 歲、17 歲

這一對夫婦的年齡分別為 34 歲、31 歲

國中數學 挑戰資優生 第13回

主題 一元二次方程式

學習指標	＊能在具體情境中認識一元二次方程式，並理解其解的意義。 ＊能以提出公因式、乘法公式的方法解一元二次方程式。 ＊能以十字交乘法解一元二次方程式。 ＊用平方根的概念解型如 $x^2=c$、$(ax\pm b)^2=c$，$c\geq 0$ 的一元二次方程式。 ＊能利用公式解一元二次方程式。 ＊根據實際問題，依題意列出方程式，整理成一元二次方程式並求解。 ＊由求出的解中選擇合於原問題的答案。

1. 解方程式 $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}+\dfrac{1}{x^2+7x+12}=\dfrac{4}{21}$。

$\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}=\dfrac{4}{21}$

$(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1})+(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2})+(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3})+(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4})=\dfrac{4}{21}$

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{4}{21}$

$\Rightarrow x^2+4x-21=0$

$(x-3)(x+7)=0$

$x=3$、-7

2. 若 $x=1$ 為方程式 $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(b-a)=0$ 的一根，其中 a、b、c 為常數，求另一根 $x=$？答：(B)。

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 無解

$x=1$ 代入得 $a(b-c)+b(c-a)+c(b-a)=0$

$\Rightarrow ab-ac+bc-ab+cb-ca=0$

$\Rightarrow 2bc-2ac=0 \Rightarrow 2c(b-a)=0$

$\therefore a=b$ 或 $c=0$(但 $ab\neq 0$)

(1) 若 $a=b$，則原式可改寫為 $a(a-c)x^2+a(c-a)x=0$

$\because a\neq c$，得 $x^2-x=0$，$x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 或 1

(2) 若 $c=0$，則原式可改寫為 $abx^2-abx=0$，$abx(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 或 1

故選(B)

3. 已知 $x-4\sqrt{x}+1=0$，則 $(\dfrac{x^2-5}{x-1}+1)\times\dfrac{x^3-1}{x^2-2x}\div(x+3)=$？

$x-4\sqrt{x}+1=0 \Rightarrow x+1=4\sqrt{x}$

$x^2+2x+1=16x \Rightarrow x^2+1=14x$

原式 $=\dfrac{x^2+x-6}{x-1}\cdot\dfrac{x^3-1}{x(x-2)}\cdot\dfrac{1}{x+3}$

$=\dfrac{(x+3)(x-2)}{x-1}\cdot\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-2)}\cdot\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{x^2+x+1}{x}=\dfrac{15x}{x}=15$

4. 已知 a 是方程式 $x^2+x-\frac{1}{4}=0$ 的解，則 $\frac{a^3-1}{a^5+a^4-a^3-a^2}=$？

a 為 $x^2+x-\frac{1}{4}=0$ 的解，所以 $a^2+a-\frac{1}{4}=0$

因此 $a^2+a=\frac{1}{4}$

$$\text{則}\frac{a^3-1}{a^5+a^4-a^3-a^2}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^3(a^2+a)-a(a^2+a)}$$
$$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a(a^2-1)(a^2+a)}$$
$$=\frac{a^2+a+1}{a(a+1)(a^2+a)}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{16}}=20$$

5. 已知 b、c 是方程式 $x^2+bx+c=0$ 的兩個解，且 $c\neq0$、$b\neq c$，求 b、c 之值。

因為 b、c 是 $x^2+bx+c=0$ 的兩個根，所以代入 $x=b$、$x=c$ 會滿足此方程式

將 $x=b$ 代入，得 $b^2+b^2+c=0$

化簡為 $2b^2+c=0\cdots$①

將 $x=c$ 代入，得 $c^2+bc+c=0$

因為 $c\neq0$，所以等號兩邊同除以 c

得 $c+b+1=0$，化簡為 $c=-b-1\cdots$②

將②代入①，得 $2b^2-b-1=0$

因式分解為 $(2b+1)(b-1)=0$，得 $b=-\frac{1}{2}$ 或 1

再將 b 值代入②，得當 $b=-\frac{1}{2}$ 時 $\Rightarrow c=-\frac{1}{2}$ 及當 $b=1$ 時 $\Rightarrow c=-2$

但題意中 $b\neq c$，所以 $b=-\frac{1}{2}$，$c=-\frac{1}{2}$ 不合，因此 $b=1$，$c=-2$

6. 假設 a、b、c、d 均不為 0，且已知 c、d 為 $x^2+ax+b=0$ 的解，而 a、b 為 $x^2+cx+d=0$ 的解，試問 $a+b+c+d=$？答：＿(B)＿。

(A) 0　(B) -2　(C) 2　(D) 4

由根與係數關係可得下列 2 個聯立方程組

$\begin{cases}ab=d\cdots\cdots\cdots①\\a+b=-c\cdots②\end{cases}$、$\begin{cases}cd=b\cdots\cdots\cdots③\\c+d=-a\cdots④\end{cases}$

將①、②代入③、④：$\begin{cases}-(a+b)\cdot ab=b\\-(a+b)+ab=-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(a+b)=-1\cdots⑤\\ab-b=0\cdots\cdots\cdots⑥\end{cases}$

由⑥得 $b(a-1)=0$

$\because b\neq0$，$\therefore a-1=0$，$a=1$

$a=1$ 代入⑤得 $b+1=-1$，$b=-2$

將 $a=1$，$b=-2$ 代入①、②得 $\begin{cases}d=1\times(-2)=-2\\c=-(1-2)=1\end{cases}$

$\therefore a+b+c+d=1+(-2)+1+(-2)=-2$

故選(B)

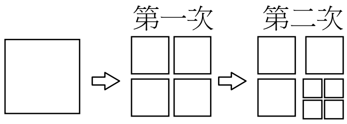
國中數學 挑戰資優生 第 14 回

主題

等差數列與等差級數

學習指標	＊能在日常生活中，觀察有次序的數列，並理解其規則性。 ＊能觀察出等差數列的規則性。 ＊能利用首項、公差計算出等差數列的每一項。 ＊能由觀察和推演，導出等差級數的公式，從理解公式到解題，並能活用於日常生活。

1. 如圖，將一片大正方形的紙張剪成四個大小相同的正方形後，再將其中一個小正方形的紙張剪成四個大小也相同的更小的正方形，若重覆這樣的動作十次，則：



(1) 最後一共有___31___個正方形。

(2) 被剪下的正方形中，最小的正方形邊長為最大的正方形(非原始正方形)邊長的___$\frac{1}{512}$___倍。

(1) 每多進行一次這樣的動作，正方形紙張會多出 3 張，
而最原始有一大張，故 $1+3n$ 為其剪第 n 次後的總張數，所以所求＝$1+3\times10=31$ 張

(2) 由題意可知，所求為$(\frac{1}{2})^9=\frac{1}{512}$

2. 有一個等差數列的總和為 2006，最小的數為正整數，最大的數為 101，請問此數列共有多少項？
答：___(A)___。

(A) 34　　(B) 35　　(C) 17　　(D) 59

$\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}=2006$

$(a_1+a_n)\cdot n=4012=2\times2\times17\times59$

∵最大的數為 101，∴$(a_1+a_n)\cdot n=118\times34$

其中 $a_1+a_n=118 \Rightarrow a_1+101=118 \Rightarrow a_1=17$

則 $n=34$

故選(A)

3. 某數列按某種規律排列如下：

1、2、3、4、3、4、5、6、5、6、7、8、7、8、9、10、……，

(1) 第 150 個數是多少？這個數第一次出現在第幾個數？

(2) 63 第一次出現在第幾個數？

(3) 這數列中，從 1 開始到第一次出現 200 為止，出現的所有奇數的和與所有偶數的和相差多少？

(1) 先將這數列按下面規律排列：

第一組：1、2、3、4；

第二組：3、4、5、6；

第三組：5、6、7、8；

第四組：7、8、9、10；

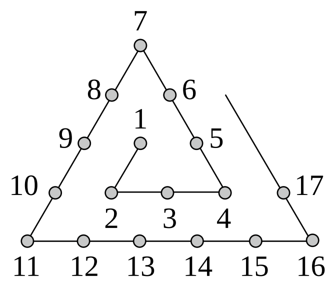
⋮

4 個數一組，150÷4＝37⋯2；那麼第 150 個數出現在第 38 組的第 2 個，第 38 組數的第 1 個是 38x2－1＝75，所以第 2 個數是 76，即第 150 個數是 76，透過觀察，從第 3 個數起，重複出現的數總是在下一組的第 1 個、第 2 個位置上，故 76 第一次出現應是第 37 組數的最後一個數，即第一次出現是第 148 個數(37x4＝148)。

(2) 第 n 組的第 1 個數是 $2n-1$，$63=2\times n-1$，$n=32$，即 63 是第 32 組的第 1 個數，它是第 4x32－3＝125 個數，63 還出現在第 31 組的第 3 個數，它是第 4x31－1＝123 個數。

(3) 200 是偶數，且是 4 的倍數，它第一次出現在該組的第 4 個，第 n 組的第 4 個數是 $4+(n-1)\times 2$，$200=4+(n-1)\times 2$，$n=99$，即「200」第一次出現在第 99 組，所以可以看出每組偶數的和都比奇數的和多 2，所以 200 第一次出現時，偶數的和與奇數的和相差 2x99＝198。

4. 如右圖，將正整數 1、2、3、4、……，從 1 開始，下面寫 2，然後右轉彎寫 3、4，再向上轉彎寫 5、6、7，依次寫下去，這樣第一次轉彎時的數是 2，第二次轉彎時的數是 4，第三次轉彎時的數是 7，……。



(1) 那麼第 10 次轉彎時的數是多少？

(2) 正整數 211 是第幾次轉彎的數？

列表分析：

轉彎點排列號	轉彎點上的數
1	2＝1＋1
2	4＝1＋1＋2
3	7＝1＋1＋2＋3
4	11＝1＋1＋2＋3＋4
5	16＝1＋1＋2＋3＋4＋5
⋮	⋮

從而得出第 n 個轉彎點上的數是 $1+1+2+3+4+\cdots\cdots+n=1+(1+n)\times n\div 2$

所以第(1)題中第 10 個轉彎點上的數是

1＋(1＋10)x10÷2＝56

第(2)題中，$211=1+(1+n)\times n\div 2$，解得 $n=20$，

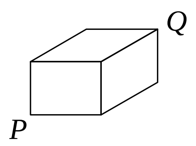
即 211 是第 20 個轉彎點上的數。

國中數學 主題 挑戰資優生 第 15 回

平面的幾何圖形

學習指標	＊能認識生活中的平面圖形。 ＊能認識圓形的定義及相關名詞。 ＊能計算複合平面圖形的周長及面積問題。 ＊能計算柱體表面積的問題。 ＊能計算複合立體圖形的體積及表面積問題。

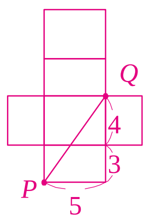
1. 右圖為一長、寬、高各為 5、4、3 的長方體，今有一隻螞蟻從 P 走到 Q 最短距離是$\sqrt{k}$，求 $k=$？



將圖形展開後，便可輕易得到 P、Q 的最短距離

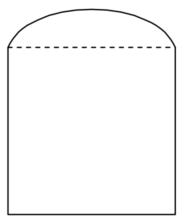
$\overline{PQ}=\sqrt{5^2+(4+3)^2}=\sqrt{74}$

所以 $k=74$



2. 某設計師設計一個窗戶，如右圖，其形狀是邊長為 80 公分的正方形，頂上再加一個半徑為 50 公分的圓弓形(此圓弓形小於半圓)，則這個窗戶的最大高度是多少公分？答：___(C)___。

(A) 90　(B) 95　(C) 100　(D) 105

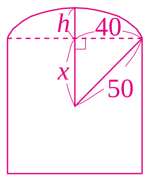


如圖，$x^2+40^2=50^2 \Rightarrow x=30$

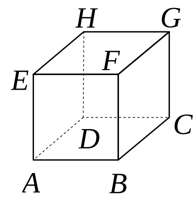
故 $h=50-x=50-30=20$

$\therefore 80+h=80+20=100$

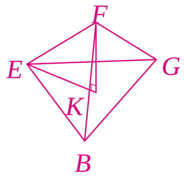
故選(C)



3. 有一個正方體，其邊長為 1，求頂點 F 到三角形 BGE 的垂直距離為何？



如圖，$\triangle BEG$ 為正三角形，F 到$\triangle BGE$ 的垂足為 K，且 K 同時落在$\triangle BEG$ 的重心上



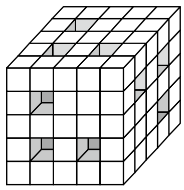
$\overline{EG}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overline{EK}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\overline{FK}=\sqrt{\overline{EF}^2-\overline{EK}^2}=\sqrt{1^2-(\frac{\sqrt{6}}{3})^2}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

故垂直距離為$\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 如右圖，建華上工藝課時，設計了一個正立方體積木，這個積木是由一些大小相等的小正立方體黏合而成，從積木的前、後、左、右、上、下看，都有三個貫穿正立方體的正方形孔，請你算一算這個積木是由多少個小正立方體黏合而成？答：___(A)___。



(A) 90　(B) 87　(C) 86　(D) 84

5x5x5＝125

125－5x3－5x3－5x3＋1x4＋2x3＝90

故選(A)

學習指標	＊能理解特殊三角形的定義。 ＊能理解三角形的基本性質。 ＊能理解三角形全等的性質。 ＊能理解三角形邊角關係。 ＊能利用三角形內角和為 180 度的性質解決多邊形內角和與外角和定理的問題。

1. 三角形的三高長度分別為$\sqrt{7}$、h、$\sqrt{5}$，則 h 的範圍為 $\underline{\dfrac{7\sqrt{5}-5\sqrt{7}}{2}<h<\dfrac{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{2}}$。

設$\sqrt{7}$的對應底邊為 a，h 的對應底邊為 b，$\sqrt{5}$的對應底邊為 c

$\therefore \frac{1}{2}\sqrt{7}a=\frac{1}{2}hb=\frac{1}{2}\sqrt{5}c$

令 $\sqrt{7}a=hb=\sqrt{5}c=k$

$\Rightarrow a=\frac{k}{\sqrt{7}}$，$b=\frac{k}{h}$，$c=\frac{k}{\sqrt{5}}$

又 $|a-c|<b<a+c$

$\Rightarrow \frac{k}{\sqrt{5}}-\frac{k}{\sqrt{7}}<\frac{k}{h}<\frac{k}{\sqrt{5}}+\frac{k}{\sqrt{7}}$

$\Rightarrow \frac{7\sqrt{5}-5\sqrt{7}}{35}<\frac{1}{h}<\frac{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{35}$

$\Rightarrow \frac{35}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}<h<\frac{35}{7\sqrt{5}-5\sqrt{7}}$

$\Rightarrow \frac{7\sqrt{5}-5\sqrt{7}}{2}<h<\frac{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{2}$

2. 三邊不等長的$\triangle ABC$，其中兩邊的高分別是 4 和 12，若第三邊的高及三邊均為整數，當第三邊的高為最大值時，求$\triangle ABC$ 周長的最小值。

設第三條高為 h，三條高對應的邊依次為 a、b、c

三角形面積為 s

則 $s=\frac{1}{2}a\times 4=\frac{1}{2}b\times 12=\frac{1}{2}ch$

於是 $a=\frac{1}{2}s$、$b=\frac{1}{6}s$、$c=\frac{2s}{h}$

顯然 $a>b$

由 $\begin{cases} b+c>a \\ a+b>c \end{cases}$，可得 $\begin{cases} \frac{s}{6}+\frac{2s}{h}>\frac{s}{2} \\ \frac{s}{2}+\frac{s}{6}>\frac{2s}{h} \end{cases}$

解得 $\begin{cases} h<6 \\ h>3 \end{cases}$

由於 h 是整數，則 h 的最大值是 5

這時 $4a=12b=5c=2s$，$c=\frac{2}{5}s$

要使 $a+b+c$ 最小，且 a、b、c 均為整數

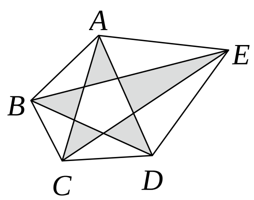
s 要取 2、6、5 的最小公倍數 30

因此$\triangle ABC$ 周長的最小值是 $15+5+12=32$

3. 用長度相等的 100 根火柴棒，排放成一個不等邊三角形，使最大邊的長度是最小邊長度的 3 倍，求滿足此條件的三角形之各邊所用火柴棒的根數。

設三角形三邊分別用 a、b、c 根火柴棒
且 $a>b>c$，$a=3c$
$a+b+c=100$
因此 $3c+b+c=100$
$b=100-4c$
而 $b+c>a$ 且 $a>b$
則 $\begin{cases}3c>100-4c\\100-4c+c>3c\end{cases}$
解得 $\begin{cases}c>14\dfrac{2}{7}\\c<16\dfrac{2}{3}\end{cases}$
c 是整數，所以 $c=15$ 或 16
當 $c=15$ 時，$a=45$，$b=40$
當 $c=16$ 時，$a=48$，$b=36$
因此三角形各邊所用火柴棒根數是 45、40、15 或 48、36、16

4. 如右圖，已知 $\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EA}=\overline{BD}$，$\angle BDC=28^\circ$，$\angle ADB=42^\circ$，則 $\angle BEC=$？



(1) $\because \overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EA}$
$\therefore \angle ADE=60^\circ$
(2) $\because \overline{BD}=\overline{DE}$
$\therefore \triangle BDE$ 為等腰三角形
$\angle BDE=60^\circ+42^\circ=102^\circ$
$\therefore \angle EBD=\angle DEB=\dfrac{180^\circ-102^\circ}{2}=39^\circ$
(3) $\because \overline{AD}=\overline{AC}$
$\therefore \triangle ACD$ 為等腰三角形
$\angle ADC=42^\circ+28^\circ=70^\circ=\angle ACD$
$\angle CAD=180^\circ-2\text{x}70^\circ=40^\circ$
(4) $\because \overline{AE}=\overline{AC}$
$\therefore \triangle ACE$ 為等腰三角形
$\angle CAE=40^\circ+60^\circ=100^\circ$
$\angle ACE=\dfrac{180^\circ-100^\circ}{2}=40^\circ \Rightarrow \angle ECD=30^\circ$
$\Rightarrow \angle CED=180^\circ-30^\circ-70^\circ-60^\circ=20^\circ$
(5) $\therefore \angle BEC=39^\circ-20^\circ=19^\circ$

5. 已知三角形有一個內角是$(180-x)^\circ$，最大角與最小角之差是 24°，求 x 值的範圍。

(1) 若$(180-x)^\circ$為最大角

則最小角為$(156-x)^\circ$

$156-x\leqq 180-(180-x)-(156-x)\leqq 180-x$

解得 $104\leqq x\leqq 112$

(2) 設最大角為α°、最小角為β°

則$\alpha+\beta+180-x=180 \Rightarrow \alpha+\beta=x$

又$\alpha-\beta=24$

解得$\begin{cases}\beta=\dfrac{1}{2}x-12\\ \alpha=\dfrac{1}{2}x+12\end{cases}$

因此$\frac{1}{2}x-12\leqq 180-x\leqq \frac{1}{2}x+12$

$112\leqq x\leqq 128$

(3) 若$(180-x)^\circ$為最小角

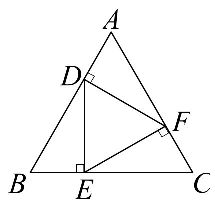
則最大角為$(204-x)^\circ$

$180-x\leqq 180-(180-x)-(204-x)\leqq 204-x$

解得 $128\leqq x\leqq 136$

綜合(1)、(2)、(3)，x 值的範圍是 $104\leqq x\leqq 136$

6. 如右圖，已知$\triangle ABC$ 是正三角形，每邊長為 6，且$\overline{DE}\perp\overline{BC}$於 E，$\overline{EF}\perp\overline{AC}$於 F，$\overline{FD}\perp\overline{AB}$於 D，則$\overline{AD}=$？



(1) $\because \angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$

且$\angle ADF=\angle DEB=\angle EFC=90^\circ$

$\therefore\triangle FAD$、$\triangle DBE$、$\triangle EFC$ 皆為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$的直角三角形

(2) 設$\overline{AD}=x$

則$\overline{BD}=6-x$

$\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}(6-x)$

$\overline{CE}=6-\overline{BE}=6-\frac{1}{2}(6-x)=3+\frac{1}{2}x$

$\overline{CF}=\frac{1}{2}\overline{CE}=\frac{1}{2}(3+\frac{1}{2}x)$

$\overline{AF}=6-\overline{CF}=6-\frac{1}{2}(3+\frac{1}{2}x)=\frac{9}{2}-\frac{1}{4}x$

(3) 再利用$\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AF}\Rightarrow x=\frac{1}{2}(\frac{9}{2}-\frac{1}{4}x)\Rightarrow x=2$

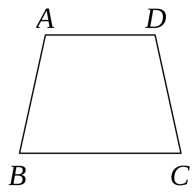
國中數學 主題 挑戰資優生

平行與四邊形

第 17 回

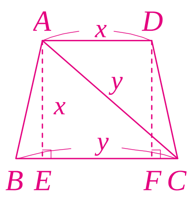
學習指標	＊能認識平行線的基本性質。 ＊能理解平行線截線性質：兩平行線同位角相等；同側內角互補；內錯角相等。 ＊能理解四邊形的基本性質。 ＊能理解特殊四邊形的定義。 ＊能理解平行四邊形的意義與性質。 ＊能理解梯形的意義與性質。

1. 有一等腰梯形 $ABCD$，其下底 $\overline{BC}$ 與對角線長相等，上底 $\overline{AD}$ 與高相等，求上底與下底的比值。



設高為 x，對角線為 y

也就是 $\overline{AE}=\overline{AD}=x$，$\overline{AC}=\overline{BC}=y$



等腰梯形中，$\overline{BE}=\dfrac{y-x}{2}$

$\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{BE}=y-\dfrac{y-x}{2}=\dfrac{y+x}{2}$

直角△AEC 中，$y^2=x^2+(\dfrac{y+x}{2})^2$

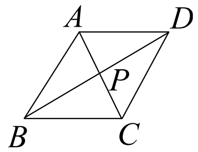
即 $4x^2+y^2+2xy+x^2=4y^2$

$\Rightarrow 5x^2+2xy-3y^2=0 \Rightarrow (5x-3y)(x+y)=0$

得 $5x=3y$ 或 $x=-y$(不合)

因此 $x:y=3:5=\dfrac{3}{5}$

2. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$，且 $\overline{CA}=\overline{CB}=\overline{CD}$，若 $\angle BPC=84^\circ$，則 $\angle PCB=$ ____64____ 度。



設 $\angle PCB=x^\circ$

則 $\angle CAD=x^\circ$(內錯角相等)

$\angle ADC=x^\circ(\overline{CA}=\overline{CD})$

$\because \angle ADP=\angle PBC=\angle CDP(\overline{CB}=\overline{CD})$

$\therefore \angle PBC=\dfrac{x^\circ}{2}$

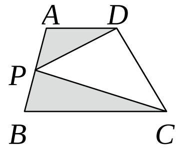
故在△PCB 中

$84^\circ+x^\circ+\dfrac{x^\circ}{2}=180^\circ$

$\Rightarrow x^\circ=64^\circ$

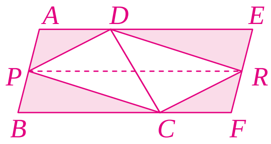
即所求 $\angle PCB=64^\circ$

3. 如右圖，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$P$ 為$\overline{AB}$的中點，若梯形 $ABCD$ 的面積為 a，



則△APD 面積＋△PBC 面積＝ $\underline{\quad \frac{1}{2}a \quad}$ 。

如右圖，將兩塊全等梯形上下放置後拼合在一起



可看出 $APRE$、$PBFR$ 均為平行四邊形

故△DPR 面積＝$\frac{1}{2}$四邊形 $APRE$ 面積

△CPR 面積＝$\frac{1}{2}$四邊形 $PBFR$ 面積

四邊形 $DPCR$ 面積＝△DPR 面積＋△CPR 面積

四邊形 $DPCR$ 面積＝$\frac{1}{2}$四邊形 $APRE$ 面積＋$\frac{1}{2}$四邊形 $PBFR$ 面積＝$\frac{1}{2}ABFE$ 面積

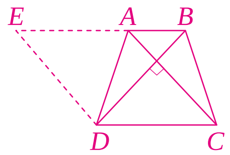
故△DPC 面積＝$\frac{1}{2}$四邊形 $DPCR$ 面積＝$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times$四邊形 $ABFE$ 面積

＝$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2$ 四邊形 $ABCD$ 面積＝$\frac{1}{2}a$

所求＝△APD 面積＋△PBC 面積＝四邊形 $ABCD$ 面積－△DPC 面積＝$a-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a$

4. 在梯形 $ABCD$ 中，已知$\overline{AB}//\overline{CD}$，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，求證$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=(\overline{AB}+\overline{DC})^2$。

作$\overline{DE}//\overline{CA}$交$\overline{BA}$的延長線於 E



由於$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，則$\overline{DE}\perp\overline{BD}$

而 $CDEA$ 是平行四邊形

則$\overline{AC}=\overline{DE}$，$\overline{CD}=\overline{AE}$

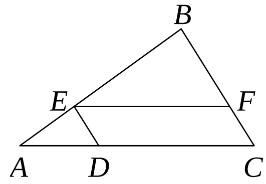
在直角△BDE 中

$\overline{BD}^2+\overline{DE}^2=\overline{BE}^2=(\overline{AE}+\overline{AB})^2=(\overline{AB}+\overline{DC})^2$

即$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=(\overline{AB}+\overline{DC})^2$

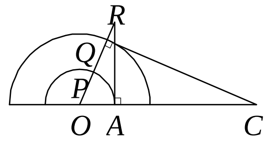
學習指標	
	＊探索三角形 AAA(或 AA)、SAS、SSS 相似性質。 ＊經過三角形一邊中點且平行於另一邊的直線，一定通過第三邊的中點，且此線段長為底邊長度的一半。 ＊能理解平行線截比例線段性質。

1. 如右圖，$\overline{EF}//\overline{AC}$，$\overline{ED}//\overline{BC}$，若$\triangle ABC$ 面積為 98 平方公分，梯形 $AEFC$ 面積為 48 平方公分，求梯形 $EBCD$ 的面積為____90____平方公分。



∵梯形 $AEFC$ 面積為 $48cm^2$
∴$\triangle BEF$ 面積為 $98-48=50cm^2$
則$\overline{BE}:\overline{AB}=\sqrt{50}:\sqrt{98}=5\sqrt{2}:7\sqrt{2}=5:7$
$\Rightarrow \overline{AE}:\overline{AB}=2:7$
$\triangle ADE$ 面積$=\dfrac{2^2}{7^2}\times 98=8cm^2$
∴梯形 $EBCD$ 面積為 $98-8=90cm^2$

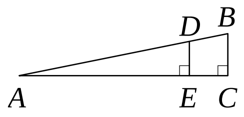
2. 圓心為 O，半徑分別為 1 與 2 的兩半圓，如圖所示，$\overline{AR}\perp\overline{OC}$，$\overline{OR}$ 交兩半圓於 P 與 Q，$\overline{QC}\perp\overline{OR}$，則 $\overline{OC}^2-4\overline{AR}^2$ 的值為多少？
答：____(C)____。



(A) 1　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 6

∵$\angle QOC=\angle ROA$，$\angle OQC=\angle OAR=90^\circ$
∴$\triangle OQC\sim\triangle OAR$
∵$\overline{OQ}=2$，$\overline{OA}=1$
∴$\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{QC}}{\overline{AR}}=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OR}}=\dfrac{2}{1}$
則$\overline{OC}^2-4\overline{AR}^2=\overline{OC}^2-(2\overline{AR})^2=\overline{OC}^2-\overline{QC}^2=\overline{OQ}^2=2^2=4$
故選(C)

3. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\overline{DE}\perp\overline{AC}$，若 $\overline{AE}=3\overline{DE}$，$\overline{CE}=1$，梯形 $DECB$ 面積為 1，則 $\overline{DE}=$？



$\triangle AED\sim\triangle ACB$

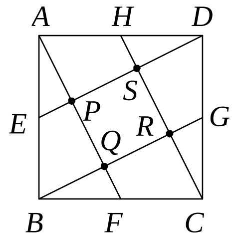
$\overline{AE}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{BC}$

設 $\overline{DE}=x$

$\therefore \overline{BC}=\frac{1}{3}(3x+1)=x+\frac{1}{3}$

利用梯形面積列方程式解得 $x=\frac{5}{6}$

4.已知右圖中 E、F、G、H 分別為正方形 $ABCD$ 四邊的中點，又 $\overline{AB}=a$，則以 a 表示正方形 $PQRS$ 的面積為 $\underline{\quad\frac{a^2}{5}\quad}$。



$\because E$、F、G、H 分別為正方形 $ABCD$ 四邊的中點，

又 $PQRS$ 為正方形，即 $\overline{ED}/\!/\overline{BG}$，$\overline{AF}/\!/\overline{CH}$

$\therefore$四邊形 $AFCH$ 的面積為 $\frac{1}{2}a^2$

同理，四邊形 $EBGD$ 的面積為 $\frac{1}{2}a^2$

四邊形 $AFCH$ 的面積＋四邊形 $EBGD$ 的面積＝a^2

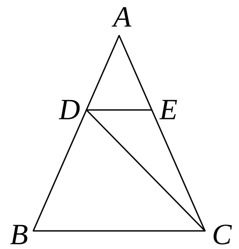
$\therefore$正方形 $PQRS$ 面積＝$4\times\triangle AEP$ 面積

$\frac{\triangle AEP\text{面積}}{\triangle ABF\text{面積}}=\frac{1^2}{(\sqrt{1^2+2^2})^2}=\frac{1}{5}$

$\triangle AEP$ 面積＝$\frac{1}{5}\triangle ABF$ 面積＝$\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times a=\frac{a^2}{20}$

$\therefore$正方形 $PQRS$ 面積＝$4\times\frac{a^2}{20}=\frac{a^2}{5}$

5. 如右圖，在△ABC 中，已知$\overline{AD}<\overline{BD}$，且$\overline{DE}//\overline{BC}$，若△$CDE$ 的面積為 6，△ABC 的面積為 25，則$\overline{AD}$：$\overline{AB}$的比值為 $\underline{\quad \frac{2}{5} \quad}$。



設△ADE 的面積$=x$

則△BDC 的面積$=25-6-x=19-x$

$\therefore \overline{AE}:\overline{CE}=\triangle ADE:\triangle CDE=x:6$

$\overline{AD}:\overline{BD}=\triangle ADC:\triangle BDC=(x+6):(19-x)$

又$\overline{DE}//\overline{BC}$，$\therefore \overline{AE}:\overline{CE}=\overline{AD}:\overline{BD}$

$\Rightarrow x:6=(x+6):(19-x)$

$\Rightarrow x^2-13x+36=0 \Rightarrow x=9$ 或 4

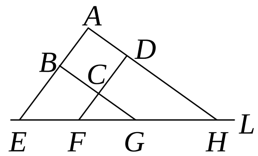
$\because \overline{AD}<\overline{BD} \Rightarrow \overline{AE}<\overline{CE}$

故 $x=9$ 不合，$\therefore x=4$

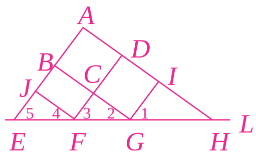
$\therefore \overline{AD}:\overline{AB}=\triangle ADC:\triangle ABC=(4+6):25=2:5$

故比值為 $\frac{2}{5}$

6. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 是正方形，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$的延長線分別交直線 L 於 E、G、F、H，已知$\overline{EF}=3$，$\overline{GH}=4$，求正方形 $ABCD$ 的邊長。



作$\overline{GI}\perp\overline{AH}$，$\overline{FJ}\perp\overline{AE}$



$\because ABCD$ 為正方形

$\therefore \angle JBC=\angle CDI=\angle FCG=90°$

$\Rightarrow \angle JFC=\angle CGI=90°$

$\therefore \angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3=\angle 3+\angle 4=\angle 4+\angle 5=90°$

$\Rightarrow \angle 1=\angle 3=\angle 5$

故△EJF～△GIH(AA 相似)

令正方形 $ABCD$ 的邊長為 x

則$\overline{JF}=\overline{GI}=x$

$\Rightarrow \overline{JE}=\sqrt{\overline{EF}^2-\overline{JF}^2}=\sqrt{3^2-x^2}$

又$\overline{JE}:\overline{EF}=\overline{GI}:\overline{GH}$

$\Rightarrow \sqrt{3^2-x^2}:3=x:4 \Rightarrow x=\pm\frac{12}{5}$ (負不合)

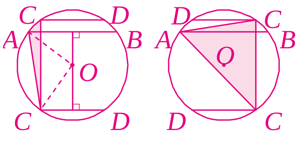
故正方形 $ABCD$ 的邊長為 $\frac{12}{5}$

圓形

學習指標	
	＊能理解切線、公切線、弦心距的意義與性質。 ＊知道過圓外一點的兩條切線段等長。 ＊能理解圓心角、圓周角的意義及其度數的求法。 ＊能理解弦切角的意義及其度數的求法。

1. 已知圓 O 中，半徑 $r=5cm$，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$是兩條平行弦，且$\overline{AB}=8cm$，$\overline{CD}=6cm$，則$\overline{AC}=$？

由題目可知，$\overline{CD}$有四種情況，如圖(一)、圖(二)所示



圖(一)　圖(二)

(1) 由圖(一)，作$\overline{AB}$、$\overline{CD}$的弦心距，

利用畢氏定理得知 O 到$\overline{AB}$距離為 3，O 到$\overline{CD}$距離為 4

$\therefore \overline{AB}$和$\overline{CD}$兩弦的距離為 7 或 1

$\Rightarrow \overline{AC}=\sqrt{7^2+[(8-6)\div 2]^2}=5\sqrt{2}$

或$\overline{AC}=\sqrt{1^2+[(8-6)\div 2]^2}=\sqrt{2}$

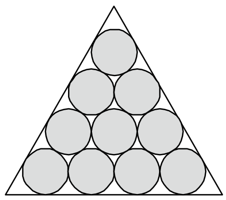
(2) 由圖(二)，

得$\overline{AC}=\sqrt{7^2+[8-(8-6)\div 2]^2}=7\sqrt{2}$

或$\overline{AC}=\sqrt{1^2+[8-(8-6)\div 2]^2}=5\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AC}$可能為$\sqrt{2}$、$5\sqrt{2}$或 $7\sqrt{2}$

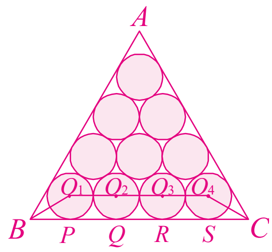
2. 如右圖，在一邊長為 a 的等邊三角形內部放置 10 個相等的圓，相鄰的兩圓互相外切，外圍的圓都與三角形的邊相切，則這 10 個等圓的面積之和為多少？



設 10 個等圓的半徑都是 r，

正△ABC 中$\overline{BC}$邊上的四個等圓 O_1、O_2、O_3、O_4與$\overline{BC}$邊分別切於 P、Q、R、S 四點，則$\overline{BO_1}$、$\overline{CO_4}$分別是$\angle B$與$\angle C$的平分線，

連接$\overline{O_1O_4}$及$\overline{O_1P}$、$\overline{O_2Q}$、$\overline{O_3R}$、$\overline{O_4S}$，於是$\overline{O_1O_4}=\overline{PS}=6r$。



則$\angle PBO_1=\angle SCO_4=\frac{1}{2}\angle B=30^\circ$

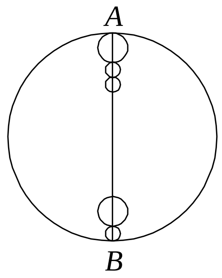
$\overline{BP}=\overline{CS}=\sqrt{3}r$

於是$\overline{BC}=2(\sqrt{3}+3)r=a$，得 $r=\frac{a}{2(\sqrt{3}+3)}$

圓 O_1 面積 $S_1=\pi r^2=\frac{(2-\sqrt{3})\pi a^2}{24}$

所求面積之和為 $10S_1=\frac{5(2-\sqrt{3})}{12}\pi a^2$

3. 在一個直徑為$\overline{AB}$的大圓內，有 a 個中圓及 b 個小圓，彼此外切，且圓心皆落在直徑$\overline{AB}$上，最上面及最下面的中圓或小圓皆與大圓內切，如圖所示。設 $b=2a$，中圓半徑是小圓半徑的 2 倍，且 a 個中圓與 b 個小圓的面積總和為大圓面積的 $\dfrac{1}{32}$ ，則中圓的個數 a 為____12____。



設小圓半徑為 r，則中圓半徑為 $2r$

$\overline{AB}=2\times2r\times a+2\times r\times b=4r\times a+2r\times2a=8ar$

故大圓半徑為 $8ar\div2=4ar$

$(2r)^2\cdot\pi\cdot a+r^2\cdot\pi\cdot b=(4ar)^2\cdot\pi\cdot\dfrac{1}{32}$

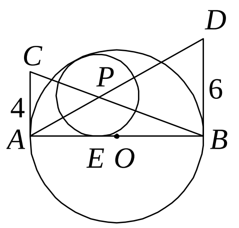
$\Rightarrow 4\pi r^2\cdot a+\pi r^2\cdot 2a=16a^2r^2\cdot\pi\cdot\dfrac{1}{32}$

$\Rightarrow 6a\pi r^2=\dfrac{1}{2}a^2\pi r^2\Rightarrow 12a=a^2\Rightarrow a(a-12)=0$

$\therefore a=0$ 或 12(0 不合)

故 $a=12$

4. 如右圖，$\angle CAB=\angle ABD=90^\circ$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BD}=6$，$\overline{AB}=10$， $\overline{AD}$、$\overline{BC}$交於 P，作圓 P 使其與$\overline{AB}$相切，試問以$\overline{AB}$為直徑作出的圓 O 與圓 P 是交於兩點、內切或內離？



大圓半徑為 $R=5$

設圓 P 與$\overline{AB}$切於 E，連$\overline{PE}$

$\Rightarrow\triangle CPA\sim\triangle BPD$

$\Rightarrow\overline{CP}:\overline{PB}=\overline{CA}:\overline{DB}=2:3$

$\therefore r:4=3:5\Rightarrow r=\dfrac{12}{5}$

又$\overline{AE}:\overline{EB}=2:3$

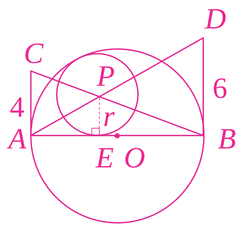
$\Rightarrow\overline{AE}=\dfrac{2}{5}\overline{AB}=\dfrac{2}{5}\times10=4$

$\Rightarrow\overline{OE}=5-4=1$

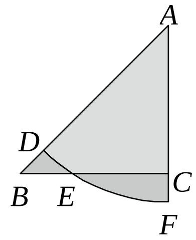
$\Rightarrow\overline{OP}=\sqrt{1^2+(\dfrac{12}{5})^2}=\dfrac{13}{5}$

$\because R-r=5-\dfrac{12}{5}=\dfrac{13}{5}$

即$\overline{OP}=R-r$，故兩圓關係為內切



5. 如右圖，在直角△ABC 中，$\overline{AC}=\overline{BC}$，$\overset{\frown}{DEF}$ 的圓心為 A，如果圖中兩個著深色部分的面積相等，則$\overline{AD}$ ：$\overline{DB}=$？



設$\overline{AD}=1$，扇形 ADF 面積＝△ABC 面積

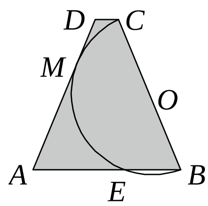
$1\times1\times\pi\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}^2\Rightarrow\pi=4\overline{AC}^2\Rightarrow\overline{AC}^2=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow\overline{AC}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\therefore\overline{AB}=\sqrt{2}\,\overline{AC}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$，$\overline{BD}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}-1$

$\therefore\overline{AD}$ ：$\overline{DB}=1:(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}-1)=2:(\sqrt{2\pi}-2)$

6. 如右圖，$ABCD$ 為一等腰梯形，底角為 67.5°，$\overline{AB}//\overline{CD}$，以$\overline{BC}$為直徑作圓，交$\overline{AB}$於 E，且與$\overline{AD}$切於 M，則$\overline{BE}$ ：$\overline{AE}=$？



連$\overline{OE}\Rightarrow$△OEB 是等腰△

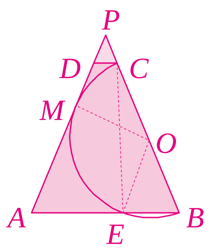
$\angle B=67.5^\circ\Rightarrow\angle OEB=67.5^\circ$

又$\angle A=67.5^\circ\Rightarrow\overline{OE}//\overline{PA}$

$\therefore\overline{BE}:\overline{AE}=\overline{BO}:\overline{OP}$

又$\angle P=180^\circ-67.5^\circ-67.5^\circ=45^\circ$

連$\overline{OM}$，則△PMO 為等腰直角三角形

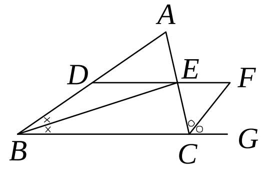


$\Rightarrow\overline{PO}=\sqrt{2}\,\overline{MO}$

$\Rightarrow\overline{BE}:\overline{AE}=\overline{BO}:\overline{OP}=\overline{MO}:\overline{OP}=\overline{MO}:\sqrt{2}\,\overline{MO}=1:\sqrt{2}$

學習指標	＊能用已知的幾何性質推理。 ＊能理解三角形外心、內心、重心的定義和相關性質。

1.如圖，$\overline{BE}$平分$\angle ABC$，$\overline{CF}$平分$\angle ACG$，且$\overline{DF}//\overline{BC}$，若$\overline{BD}=5$公分，$\overline{DF}=8$公分，則$\overline{EC}=$ <u>3</u> 公分。



(1) 在$\triangle DBE$中

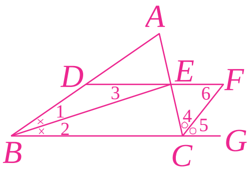
$\because \angle 1=\angle 2$ ($\overline{BE}$平分$\angle ABC$)

$\angle 2=\angle 3$ ($\overline{DF}//\overline{BC}$)

$\therefore \angle 1=\angle 3$

$\overline{DE}=\overline{BD}=5$公分

$\overline{EF}=\overline{DF}-\overline{DE}=8-5=3$公分



(2) 在$\triangle ECF$中

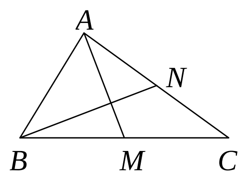
$\because \angle 4=\angle 5$ ($\overline{CF}$平分$\angle ACG$)

$\angle 5=\angle 6$ ($\overline{DF}//\overline{BC}$)

$\therefore \angle 4=\angle 6$

$\overline{EC}=\overline{EF}=3$公分

2.如右圖，在$\triangle ABC$中，若$\overline{BM}=\overline{CM}$，$\overline{AN}=\overline{CN}$，$\overline{AM}\perp\overline{BN}$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=7$，則$\overline{AB}=$ <u>$\sqrt{17}$</u> 。

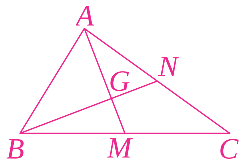


$\because \overline{BM}=\overline{CM}$，$\overline{AN}=\overline{CN}$

$\Rightarrow G$是重心

$\therefore \overline{GN}=\frac{1}{2}\overline{BG}$

$\overline{GM}=\frac{1}{2}\overline{AG}$



又$\overline{AM}\perp\overline{BN}$

$\therefore \overline{BG}^2+\overline{GM}^2=\overline{BM}^2$

$\Rightarrow \overline{BG}^2+(\frac{1}{2}\overline{AG})^2=\overline{BM}^2$……①

$\overline{AG}^2+\overline{GN}^2=\overline{AN}^2$

$\Rightarrow \overline{AG}^2+(\frac{1}{2}\overline{BG})^2=\overline{AN}^2$……②

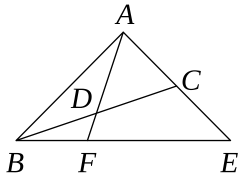
①+②：$\frac{5}{4}\overline{BG}^2+\frac{5}{4}\overline{AG}^2=\overline{BM}^2+\overline{AN}^2$

$\Rightarrow \frac{5}{4}\overline{AB}^2=(\frac{6}{2})^2+(\frac{7}{2})^2$

$\Rightarrow \overline{AB}^2=17 \Rightarrow \overline{AB}=\pm\sqrt{17}$(負不合)

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{17}$

3. 如右圖，$\triangle ABE$ 中，$\overline{AC}=\overline{CE}$，$\overline{EF}=2\overline{BF}$，若$\angle DCA=\angle DAC$，則$\angle BAC=$___90___度。



過 C 作$\overline{CG}/\!/\overline{AF}$

在$\triangle AEF$ 中，$\because \overline{CG}/\!/\overline{AF}$

$\therefore \overline{AC}:\overline{CE}=\overline{FG}:\overline{GE}$

$\Rightarrow \overline{FG}:\overline{GE}=1:1$

又$\overline{EF}=2\overline{BF}$

$\Rightarrow \overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GE}=1:1:1$

在$\triangle BCG$ 中，$\because \overline{DF}/\!/\overline{CG}$

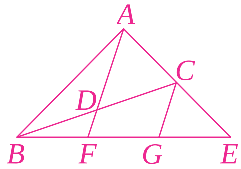
$\therefore \overline{BD}:\overline{CD}=\overline{BF}:\overline{FG}=1:1$

又$\angle DCA=\angle DAC$，$\therefore \overline{DA}=\overline{CD}=\overline{BD}$

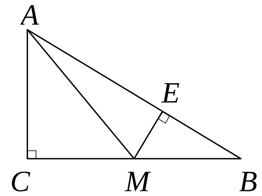
令$\angle DCA=\angle DAC=x^\circ$

則$\angle BDA=2x^\circ \Rightarrow \angle BAD=\dfrac{180^\circ-2x^\circ}{2}=90^\circ-x^\circ$

故$\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC=90^\circ-x^\circ+x^\circ=90^\circ$



4. 如右圖，直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，M 為$\overline{BC}$中點，M 到斜邊$\overline{AB}$的距離為 d，試說明 $d\le \dfrac{1}{3}\overline{AM}$。



作$\overline{AB}$上的中線$\overline{CO}$

交$\overline{AM}$於 G

$\Rightarrow \overline{GM}=\dfrac{1}{3}\overline{AM}$

$\because O$ 亦為$\triangle ABC$ 的外心

$\therefore \overline{OC}=\overline{OB}$

又$\overline{OM}=\overline{OM}$，$\overline{CM}=\overline{BM}$

$\therefore \triangle OCM\cong\triangle OBM$($SSS$ 全等性質)

作$\overline{ME'}\perp\overline{OC}$，則$\overline{ME'}=\overline{ME}$

(1) 若 E'與 G 不為同一點

則$\overline{MG}>\overline{ME'}\Rightarrow \overline{MG}>\overline{ME}$

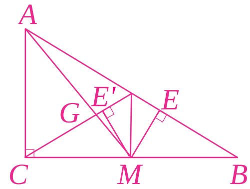
即$\overline{ME}<\dfrac{1}{3}\overline{AM}$

(2) 若 E'與 G 為同一點

則$\overline{MG}=\overline{ME'}\Rightarrow \overline{MG}=\overline{ME}$

即$\overline{ME}=\dfrac{1}{3}\overline{AM}$

由(1)、(2)可知$\overline{ME}\le\dfrac{1}{3}\overline{AM}\Rightarrow d\le\dfrac{1}{3}\overline{AM}$



二次函數

學習指標	＊能以具體情境來理解二次函數的意義。 ＊能理解二次函數的樣式並繪出其圖形。 ＊能應用二次函數最大值與最小值的簡單性質。 ＊能理解二次函數的圖形與拋物線的概念。

1. 若將 $y=f(x)=4x^2+1$ 與 $y=g(x)=-2x^2-3$ 的圖形畫在同一個坐標平面上，再畫直線 $x=a$，設直線與 $f(x)$、$g(x)$的圖形相交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB}=$ ___$6a^2+4$___。(以 a 表示)

$y=f(x)=4x^2+1$

x	a
$f(x)$	$4a^2+1$

$y=g(x)=-2x^2-3$

x	a
$g(x)$	$-2a^2-3$

故 $A(a , 4a^2+1)$、$B(a , -2a^2-3)$

所求 $\overline{AB}=(4a^2+1)-(-2a^2-3)=6a^2+4$

2. 設方程式 $mx^2+(m+2)x-9m=0$ 有兩個相異實根 x_1、x_2，且 $x_1<1<x_2$，求 m 的範圍。

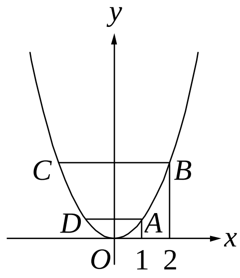
令 $y=mx^2+(m+2)x-9m$，則 $m\neq0$

當 $m<0$ 時，$m\cdot1^2+(m+2)\cdot1-9m>0$，得 $m<\frac{2}{7}$；

當 $m>0$ 時，$m\cdot1^2+(m+2)-9m<0$，得 $m>\frac{2}{7}$

故 $m<0$ 或 $m>\frac{2}{7}$

3. 如圖，A、B 兩點在二次函數 $y=ax^2$ 上，且 A、B 兩點的 x 坐標分別是 1、2，若 C、D 兩點也在函數 $y=ax^2$ 上，且 $\overline{BC}//\overline{AD}$，$\overline{BC}$平行 x 軸，且四邊形 $ABCD$ 的面積為 6 平方單位，則 a 之值為何？



答：　(D)　。

(A) $\frac{5}{6}$　(B) $\frac{4}{5}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{2}{3}$

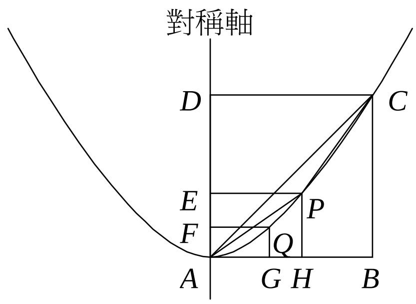
由題意可知 A、B、C、D 的坐標分別為$(1, a)$、$(2, 4a)$、$(-1, a)$、$(-2, 4a)$

$\therefore \overline{AD}=2$，$\overline{BC}=4$，梯形的高為 $4a-a=3a$

$\therefore \frac{(2+4)\times 3a}{2}=6 \Rightarrow a=\frac{2}{3}$

故選(D)

4. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 為正方形，拋物線頂點在 A，且圖形過點 C，若$\overline{AB}=a$，$\overline{AH}=b$，a、b 為整數，$\overline{AE}=k$，$\overline{AG}=2$，$\overline{AF}=\frac{1}{2}$，且$\triangle APC$ 之面積為 8，則 $k=$　2　。



設拋物線為 $y=Ax^2$

將$(2, \frac{1}{2})$代入 $\Rightarrow \frac{1}{2}=A\cdot 2^2 \Rightarrow A=\frac{1}{8}$

$\therefore$拋物線為 $y=\frac{1}{8}x^2$

將(a, a)代入 $\Rightarrow a=\frac{1}{8}a^2 \Rightarrow a=8$、0(不合)

將(b, k)代入 $\Rightarrow k=\frac{1}{8}b^2$

$\therefore \frac{1}{2}\times b\times k+\frac{(k+a)(a-b)}{2}=\frac{1}{2}a^2-8$

$\Rightarrow k-b=-2 \Rightarrow \frac{1}{8}b^2-b=-2$

$\Rightarrow (b-4)^2=0 \Rightarrow b=4$

$\therefore k=\frac{1}{8}\times 4^2=2$

學習指標	＊能將原始資料整理成次數分配表，並製作統計圖形，來顯示資料蘊含的意義。 ＊能認識平均數、中位數與眾數均可以某個程度地表示整筆資料集中的位置。

1. (1) 若 $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ 的平均數為 $\overline{x}$，則 $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n, \overline{x}$ 的平均數為 $\underline{\quad \overline{x} \quad}$。

   (2) 若 $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ 的平均數為 $\overline{x}$，則 $(\overline{x}-x_1)+(\overline{x}-x_2)+(\overline{x}-x_3)+\ldots\ldots+(\overline{x}-x_n)$ $=\underline{\quad 0 \quad}$。

(1) 由 $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ 的平均數為 $\overline{x}$

可知 $x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n=n\overline{x}$

所求 $=\dfrac{x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n+\overline{x}}{n+1}$

$=\dfrac{n\overline{x}+\overline{x}}{n+1}$

$=\dfrac{(n+1)\overline{x}}{n+1}$

$=\overline{x}$

(2) 由 $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ 的平均數為 $\overline{x}$

可知 $x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n=n\overline{x}$

故所求 $=(\overline{x}-x_1)+(\overline{x}-x_2)+(\overline{x}-x_3)+\ldots\ldots+(\overline{x}-x_n)$

$=n\overline{x}-(x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n)$

$=n\overline{x}-n\overline{x}$

$=0$

2. 已知 $a>b>1$，則 $\dfrac{1}{a}$、$\dfrac{1}{b}$、$\dfrac{b}{a}$、$\dfrac{a}{b}$、a、b、1 這七個數的中位數為 $\underline{\quad 1 \quad}$。

由 $a>b>1$

可知 $\dfrac{1}{a}$、$\dfrac{1}{b}$、$\dfrac{b}{a}$ 均小於 1

且 $\dfrac{a}{b}$、a、b 均大於 1

故最中間的數(即中位數)為 1

3. 已知 $x_1<x_2<x_3<x_4$，若 x_1-a、x_2-a、x_3-a、x_4-a 的中位數為 m，則 x_1+2a、x_2+2a、x_3+2a、x_4+2a 的中位數為 ___$m+3a$___。

由題意可知 $\dfrac{(x_2-a)+(x_3-a)}{2}=m$

$\Rightarrow \dfrac{x_2+x_3}{2}-a=m$

$\Rightarrow \dfrac{x_2+x_3}{2}=m+a$

所求 $=\dfrac{(x_2+2a)+(x_3+2a)}{2}=\dfrac{x_2+x_3}{2}+2a$

$=(m+a)+2a$

$=m+3a$

4. 某班有 50 人，在一次數學考試後，按成績排了名次，結果前 30 名的平均分數比後 20 名的平均分數多 12 分，一位同學對「平均」的概念不清楚，他把前 30 名的平均成績，加上後 20 名的平均成績，再除以 2，錯誤的認為這就是全班的平均成績，這樣做全班的平均成績是提高了，還是降低了？請算出提高多少或降低多少分？

(前 30 名的平均分數＋後 20 名的平均分數)÷2，
比後 20 名的平均分數多 12÷2＝6(分)，
而全班的平均分數比後 20 名的平均分數多 30x12÷50＝7.2(分)
降低 1.2 分

機率

學習指標	＊能進行簡單的實驗以了解抽樣的不確定性、隨機性質等初步概念。

1. 甲、乙、丙、丁四人排成一列，則甲、乙相鄰的機率＝ $\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$ 。

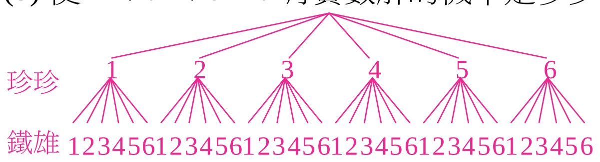
(1) □□□□
如圖，甲、乙、丙、丁四人各占一個位置
其全部情況共有 4x3x2x1＝24 種
(2) 因甲、乙相鄰，甲乙　丙　丁，故看成三人
各占一個位置，其全部情況共有 3x2x1＝6 種
(3) 承(2)，同理，乙甲　丙　丁 的情況也為 6 種
(4) 綜合以上所述，所求＝$\frac{6+6}{24}=\frac{1}{2}$

2. 珍珍和鐵雄各投擲一粒骰子，若得 a 點和 b 點，則：

(1) 方程組$\begin{cases} 2x+ax=1 \\ bx+3y=4 \end{cases}$無解的機率是多少？

(2) $ax=b$ 有整數解的機率是多少？

(3) 使 $x^2+ax+b=0$ 有實數解的機率是多少？



所有事件有 6x6＝36(種)

(1) $\frac{2}{b}=\frac{a}{3}\neq\frac{1}{4}$ 得 $ab=6\Rightarrow$

a	1	2	3	6
b	6	3	2	1

，∴機率＝$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(2)

a	1	2	3	4	5	6
b	1～6	2，4，6	3，6	4	5	6

，∴機率＝$\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$

(3) $\triangle=a^2-4b\geqq 0$，得

a	2	3	4	5	6
b	1	1，2	1～4	1～6	1～6

，∴機率＝$\frac{19}{36}$

3. 有甲、乙二人，甲持黑子、乙持白子，放置如右圖，二人輪流投擲骰子，各依擲出的點數移動棋子，規定白子向左移動，而黑子向右移動，若擲出的點數超過黑白兩子之間的空格數，則被判定失敗，試問：

●			○

(1) 若甲先擲出 1 點，則甲獲勝的機率是多少？

(2) 若甲先擲，則甲獲勝的機率是多少？

(1) 甲擲出 1 點，則乙擲出 2、3、4、5、6 點都是甲獲勝

∴機率＝$\frac{5}{6}$

(2) 甲先擲，則甲獲勝的事件有

(甲 , 乙)＝(1 , 2)、(1 , 3)、(1 , 4)、(1 , 5)、(1 , 6)、(2 , 1)、(2 , 2)、(2 , 3)、(2 , 4)、(2 , 5)、(2 , 6)，共 11 種，

兩人各擲一次的可能結果有 6×6＝36(種)

∴甲獲勝的機率＝$\frac{11}{36}$

4. 六名圍棋高手 A、B、C、D、E、F 比賽圍棋，每兩人都必須比賽一局，第一天 A 與 B 各賽了 3 局，C 與 D 各賽了 4 局，E 賽了 2 局，而 A 和 C、B 和 D 之間還沒比賽過，請問 F 已經比賽了幾局？

由題意可得：

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
A		○	×	√	－	○
B	○		√	×	－	○
C	×	√		√	√	√
D	√	×	√		√	√
E	－	－	√	√		－
F	○	○	√	√	－	

√：由題目得知已賽
○：推斷得知已賽
×：由題目得知未賽
－：推斷得知未賽

故 F 已經比賽了 4 局