

2-2 根式的運算

1. 根式的乘除運算

(1) 若 $a \geq 0, b \geq 0$, 則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

(2) 若 $a \geq 0, b > 0$, 則

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \div b}。$$

2. 根式的化簡

a 為正整數, 若 $a = b^2 \times c$, 其中 b 是正整數, c 是正整數, 且 c 的因數中沒有大於 1 的 完全平方數, 則 $\sqrt{a} = b\sqrt{c}$ 。 $b\sqrt{c}$ 稱為平方根 \sqrt{a} 的最簡式或 最簡根式。

3. 有理化分母

若 a, b 為正數, $a \neq b, c$ 為任意數, 則有理化分母時,

(1) $\frac{c}{\sqrt{a}}$: 將分母與分子同乘以 \sqrt{a} 。

(2) $\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$: 將分母與分子同乘以 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 。

(3) $\frac{c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$: 將分母與分子同乘以 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 。

▲ 實例演練

(1) 有理化分母 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

(2) 有理化分母 $\frac{5}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{5}$ 。

2-3 畢氏定理

1. 畢氏定理

任一直角三角形中, 兩股長平方和等於斜邊長平方, 即 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ 。



▲ 實例演練

已知直角三角形的一股長為 24, 斜邊長為 26, 則另一股長是 10。

2. 距離公式

給定坐標平面上任意兩點 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 則 A, B 兩點間的距離

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x \text{ 坐標的差})^2 + (y \text{ 坐標的差})^2}。 \end{aligned}$$

3-1 提公因式法與乘法公式因式分解

1. 因式與倍式

設 A, B, C 為三個不為 0 的多項式, 若 $A = B \times C$, 則 B, C 都是 A 的因式, A 是 B 和 C 的 倍式。

2. 因式分解

將一個 x 的二次式寫成兩個 x 的一次式乘積, 稱為將這個二次式因式分解。

3. 提公因式法

如果式子的各項有一次以上的公因式, 可利用將此公因式提出, 來完成因式分解。

▲ 實例演練

(1) 因式分解 $2x^2 - 4x$ 為 $2x(x-2)$ 。

(2) 因式分解 $2x^2 + 7x - 2x - 7$ 為 $(2x+7)(x-1)$ 。

4. 利用乘法公式因式分解

(1) 型如 $a^2 - b^2$ 的多項式, 可以利用平方差公式因式分解為 $(a+b)(a-b)$ 的形式。

(2) 型如 $a^2 + 2ab + b^2$ 的多項式, 可以利用和的平方公式因式分解為 $(a+b)^2$ 的形式。

(3) 型如 $a^2 - 2ab + b^2$ 的多項式, 可以利用差的平方公式因式分解為 $(a-b)^2$ 的形式。

▲ 實例演練

(1) 因式分解 $x^2 - 36$ 為 $(x+6)(x-6)$ 。

(2) 因式分解 $x^2 + 8x + 16$ 為 $(x+4)^2$ 。

(3) 因式分解 $x^2 - 6x + 9$ 為 $(x-3)^2$ 。

3-2 利用十字交乘法因式分解

1. 二次項係數為 1 的十字交乘法

二次式 $x^2 + (a+b)x + ab$ (其中 a, b 是整數) 可因式分解成 $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ 。

▲ 實例演練

因式分解 $x^2 + 8x + 15$ 為 $(x+3)(x+5)$ 。

2. 二次項係數不為 1 的十字交乘法

二次式 $abx^2 + (ad+bc)x + cd$ (其中 a, b, c, d 為整數, $a \neq 0, b \neq 0$)

可因式分解成 $abx^2 + (ad+bc)x + cd = (ax+c)(bx+d)$ 。

▲ 實例演練

因式分解 $6x^2 - 25x - 9$ 為 $(3x+1)(2x-9)$ 。