第 1 章　乘法公式與多項式

1 乘法公式（難度★★★★☆）

(1) 若 $A=2017^2+2017+2019$，$B=2017^2-2017-2015$，且 $k=A^2-B^2$，將 k 值寫成標準分解式後，則 k 的標準分解式中 2 的次方為幾次？

$A=2017^2+2017+2019$

$B=2017^2-2017-2015$

$A+B=(2017^2+2017+2019)+(2017^2-2017-2015)=2\times2017^2+4=2\times(2017^2+2)$

$A-B=(2017^2+2017+2019)-(2017^2-2017-2015)=2017+2017+2019+2015=8608$

$\because k=A^2-B^2=(A+B)(A-B)=2\times(2017^2+2)\times8068$

其中 2017^2+2 的值不爲 2 的倍數，

又 $8068=2^2\times2017$

$\therefore k$ 的標準分解式中 2 的次方爲 3 次。

(2) 已知 $\frac{1}{4}(b-c)^2=(a-b)(c-a)$，且 $a\neq0$，則 $\frac{b+c}{a}$ 的值為何？

$\frac{1}{4}(b-c)^2=(a-b)(c-a)$

$(b-c)^2=4(a-b)(c-a)$

$b^2-2bc+c^2=4ac-4a^2-4bc+4ab$

$4a^2+b^2+c^2-4ab+2bc-4ac=0$

$4a^2-4ab+b^2-4ac+2bc+c^2=0$

$(2a-b)^2-2c(2a-b)+c^2=0$

$(2a-b-c)^2=0$

$\therefore 2a-b-c=0$

$b+c=2a$

$\frac{b+c}{a}=2$

2 多項式除法的應用（難度★★★★☆）

(1) 若 $2x^2-x-5=0$，則多項式 $6x^3-7x^2-13x-4$ 的值為何？

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x\ \ -2 \\
2x^2-x-5 & 6x^3-7x^2-13x-4 \\
 & 6x^3-3x^2-15x \\
\hline
 & \quad -4x^2+2x-4 \\
 & \quad -4x^2+2x+10 \\
\hline
 & \qquad\qquad -14
\end{array}
$$

因為 $6x^3-7x^2-13x-4=(2x^2-x-5)(3x-2)-14$

所以當 $2x^2-x-5=0$ 時，$6x^3-7x^2-13x-4$ 的值為 -14。

(2) 若 $x^2+2x-15=0$，則多項式 $4x^3+11x^2-50x+50$ 的值為何？

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x\ \ +3 \\
x^2+2x-15 & 4x^3+11x^2-50x+50 \\
 & 4x^3+8x^2-60x \\
\hline
 & \qquad 3x^2+10x+50 \\
 & \qquad 3x^2+6x-45 \\
\hline
 & \qquad\qquad 4x+95
\end{array}
$$

因為 $4x^3+11x^2-50x+50=(x^2+2x-15)(4x+3)+(4x+95)$

又 $x^2+2x-15=0$

$(x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-5$ 或 $x=3$

故當 $x^2+2x-15=0$ 時，$4x^3+11x^2-50x+50$ 的值為 $4x+95$，

因此，可得 $4\times(-5)+95=75$ 或 $4\times3+95=107$。

3 多項式的值（難度★★★☆☆）

已知多項式 $y=ax^7+bx^5+cx^3+dx-15$，當 $x=1$ 時，y 值為 2017，則當 $x=-1$ 時，y 值為何？

將 $x=1$ 代入原式得 $a+b+c+d-15=2017$

$\therefore a+b+c+d=2032$

將 $x=-1$ 代入原式得 $y=-a-b-c-d-15$

$$\begin{aligned}&=-(a+b+c+d)-15\\&=-2032-15\\&=-2047\end{aligned}$$

4 多項式除法（難度★★★☆☆）

若 a、b 為整數，且多項式 $x^2+4x+b+ax^5$ 能被 x^2+2 整除，則 a、b 的值為多少？

$$\begin{array}{r|l}
 & ax^3 \qquad -2ax + 1 \\ \hline
x^2+0x+2 & ax^5+0x^4+0x^3+x^2+4x+b \\
 & ax^5+0x^4+2ax^3 \\ \hline
 & \qquad -2ax^3+x^2+4x \\
 & \qquad -2ax^3+0x^2-4ax \\ \hline
 & \qquad\qquad x^2+(4+4a)x+b \\
 & \qquad\qquad x^2+0x+2 \\ \hline
 & \qquad\qquad (4+4a)x+(b-2)
\end{array}$$

$\therefore 4+4a=0$，$a=-1$

$b-2=0$，$b=2$

第 2 章　二次方根與畢氏定理

1 根式結合乘法公式（難度★★★★☆）

(1) 若 $0<x<1$，且 $a=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}$，$b=\sqrt{4x^2+\frac{9}{x^2}+12}-\sqrt{4x^2+\frac{9}{x^2}-12}$，則 $a\times b$ 的值為何？

$\because 0<x<1$

$\therefore \frac{1}{x}>1$

則 $x+\frac{1}{x}>0$，$x-\frac{1}{x}<0$，同理，$2x+\frac{3}{x}>0$，$2x-\frac{3}{x}<0$

$a=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}=\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2}+\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2}=(x+\frac{1}{x})-(x-\frac{1}{x})=\frac{2}{x}$

$b=\sqrt{4x^2+\frac{9}{x^2}+12}-\sqrt{4x^2+\frac{9}{x^2}-12}=\sqrt{(2x+\frac{3}{x})^2}-\sqrt{(2x-\frac{3}{x})^2}=(2x+\frac{3}{x})+(2x-\frac{3}{x})=4x$

故 $a\times b=\frac{2}{x}\times 4x=8$

(2) 計算 $\sqrt{2021\frac{4}{2025}}-\sqrt{231\frac{9}{225}}$ 的值為何？

$\sqrt{2021\frac{4}{2025}}=\sqrt{2025-4+\frac{4}{2025}}=\sqrt{(45-\frac{2}{45})^2}=44\frac{43}{45}$

$\sqrt{231\frac{9}{225}}=\sqrt{225+6+\frac{9}{225}}=\sqrt{(15+\frac{3}{15})^2}=15\frac{3}{15}$

$\therefore \sqrt{2021\frac{4}{2025}}-\sqrt{231\frac{9}{225}}=44\frac{43}{45}-15\frac{3}{15}$

$=44\frac{43}{45}-15\frac{9}{45}$

$=29\frac{34}{45}$

2 雙重方根（難度★★★★☆）

若 $\sqrt{21+8\sqrt{5}}$ 的小數部分為 a，則 $a^2+\dfrac{1}{a}$ 的值為多少？

$\sqrt{21+8\sqrt{5}}=\sqrt{21+2\sqrt{80}}=\sqrt{(\sqrt{16}+\sqrt{5})^2}=4+\sqrt{5}$

∵$4+\sqrt{5}$ 的整數部分爲 6

∴小數部分爲 $(4+\sqrt{5})-6=\sqrt{5}-2$

$$
\begin{aligned}
a^2+\frac{1}{a}&=(\sqrt{5}-2)^2+(\frac{1}{\sqrt{5}-2})\\
&=5-4\sqrt{5}+4+\frac{1\times(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)\times(\sqrt{5}+2)}\\
&=9-4\sqrt{5}+\sqrt{5}+2\\
&=11-3\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

3 畢氏定理與斜邊上的高（難度★★★★☆）

在坐標平面上，$A(2,3)$ 到直線 $3x+4y+12=0$ 的距離為何？

將 $x=2$ 代入直線得 $3\times2+4y=-12$，$y=-\dfrac{9}{2}$，

故可得 $B\left(2,-\dfrac{9}{2}\right)$。

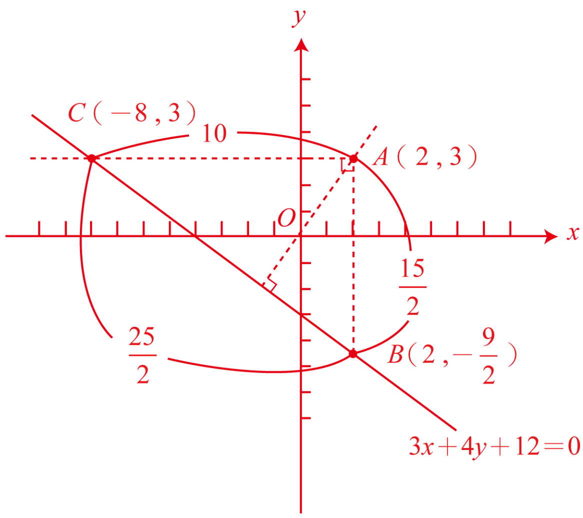
將 $y=3$ 代入直線得 $3x+4\times3=-12$，$x=-8$，

故可得 $C(-8,3)$。

得 $\overline{AB}=\left|-\dfrac{9}{2}-3\right|=\dfrac{15}{2}$

$\overline{AC}=|-8-2|=10$

$\overline{BC}=\sqrt{10^2+(\dfrac{15}{2})^2}=\dfrac{25}{2}$



所以 A 點到直線 $3x+4y+12=0$ 的距離 $=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\frac{15}{2}\times10}{\frac{25}{2}}=6$。

4 畢氏定理結合乘法公式（難度★★★☆☆）

若有一個直角三角形的斜邊長為 45 公分，兩股和為 63 公分，則此直角三角形的面積為多少平方公分？

設兩股長分別爲 a、b 公分，

$$\begin{cases} a+b=63 \\ a^2+b^2=45^2 \end{cases}$$

又 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+b^2+2ab$

$\therefore 63^2=45^2+2ab$

$2ab=63^2-45^2=(63+45)(63-45)=108\times 18=1944$

$ab=972$

故直角三角形的面積$=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\times 972=486$（平方公分）。

5 畢氏定理的應用（難度★★★★☆）

若有一個直角三角形的三邊長為 a、b、c，其中 c 為斜邊，且 h 為斜邊上的高，則三邊長為 $c+h$、$a+b$、h 的三角形為何種三角形？以文字或數學式說明理由。

由直角三角形的三邊長爲 a、b、c，其中 c 爲斜邊可得 $a^2+b^2=c^2$，

由 h 爲斜邊上的高，可得 $h=\dfrac{ab}{c}$，$hc=ab$

$$\begin{aligned}(a+b)^2+h^2&=a^2+2ab+b^2+h^2\\&=a^2+b^2+2ab+h^2\\&=c^2+2ch+h^2\\&=(c+h)^2\end{aligned}$$

由於三邊長符合畢氏定理，故三邊長爲 $c+h$、$a+b$、h 的三角形爲直角三角形。

第 3 章　因式分解

1 因式分解結合直角三角形（難度★★★☆☆）

有一個直角三角形的三邊長皆為整數，其中一股長為質數 p，已知 p^2 也為質數，則此直角三角形的周長與面積分別為何？(以 p 的式子表示)

設另一股長爲 a，斜邊長爲 b，

由畢氏定理可知：$a^2+p^2=b^2$，$b^2-a^2=p^2$，$(b+a)(b-a)=p^2$

已知 p^2 爲質數，故 $(b-a)=1$，$(b+a)=p^2$，

所以周長 $=a+b+p=p^2+p$

又 $\begin{cases} b+a=p^2 \cdots\cdots ① \\ b-a=1 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$

由①式－②式得 $2a=p^2-1$，$a=\dfrac{p^2-1}{2}$

故面積 $=\dfrac{a\times p}{2}=\left(\dfrac{p^2-1}{2}\right)\times p\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{p^3-p}{4}$

2 十字交乘法結合質數概念（難度★★★☆☆）

若 $p=8k^2-2k-15$ 為質數且 p 為正整數，則 $p\times k$ 的值為多少？

$8k^2-2k-15=(2k-3)(4k+5)$ 爲質數

若 $2k-3=1$，$k=2$，

則 $p=4\times2+5=13$，$\therefore p\times k=26$，

若 $4k+5=1$，$k=-1$，

則 $p=2\times(-1)-3=-5$（不合）

故 $p\times k$ 的值爲 26。

$$\begin{array}{ccc} 2k & \times & -3 \\ 4k & & +5 \\ \hline -12k & + & 10k = -2k \end{array}$$

3 代換法結合十字交乘法（難度★★★★☆）

(1) 因式分解 $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)-840$。

【解一】

$(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)-840$

$=(x+3)(x+6)(x+4)(x+5)-840$

$=(x^2+9x+18)(x^2+9x+20)-840$

令 $A=x^2+9x$

則原式 $=(A+18)(A+20)-840$

$=A^2+38A+360-840$

$=A^2+38A-480$

$=(A-10)(A+48)$

$=(x^2+9x-10)(x^2+9x+48)$

$=(x+10)(x-1)(x^2+9x+48)$

【解二】

$(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)-840$

$=(x+3)(x+6)(x+4)(x+5)-840$

$=(x^2+9x+18)(x^2+9x+20)-840$

$=(x^2+9x)^2+38(x^2+9x)+360-840$

$=(x^2+9x)^2+38(x^2+9x)-480$

$=(x^2+9x-10)(x^2+9x+48)$

$=(x+10)(x-1)(x^2+9x+48)$

(2) 因式分解 $(x+2)(x+3)(x+4)(x+6)-30x^2$。

【解一】

$(x+2)(x+3)(x+4)(x+6)-30x^2$

$=(x+2)(x+6)(x+3)(x+4)-30x^2$

$=(x^2+8x+12)(x^2+7x+12)-30x^2$

令 $A=x^2+12$

則原式 $=(A+8x)(A+7x)-30x^2$

$=A^2+15Ax+56x^2-30x^2$

$=A^2+15Ax+26x^2$

$=(A+13x)(A+2x)$

$=(x^2+13x+12)(x^2+2x+12)$

$=(x+1)(x+12)(x^2+2x+12)$

【解二】

$(x+2)(x+3)(x+4)(x+6)-30x^2$

$=(x+2)(x+6)(x+3)(x+4)-30x^2$

$=(x^2+8x+12)(x^2+7x+12)-30x^2$

$=(x^2+12)^2+15x(x^2+12)+56x^2-30x^2$

$=(x^2+12)^2+15x(x^2+12)+26x^2$

$=(x^2+13x+12)(x^2+2x+12)$

$=(x+1)(x+12)(x^2+2x+12)$

$$\begin{array}{ccc} (x^2+12) & \times & +\ 2x \\ (x^2+12) & & +13x \\ \hline \end{array}$$

$2x(x^2+12)+13x(x^2+12)=15x(x^2+12)$

4 因式分解的應用問題（難度★★★★★）

(1) 若 x、y 為正整數，且滿足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$，則 $x+y$ 的最大值、最小值分別為多少？

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$，等號兩邊同乘 $4xy$

得 $4y+4x=xy$

$xy-4x-4y=0$

$xy-4x-4y+16=16$

$x(y-4)-4(y-4)=16$

$(x-4)(y-4)=16$

列表如右：

$\therefore x+y$ 的最大值為 $20+5=25$

最小值為 $8+8=16$

$x-4$	1	2	4	8	16
$y-4$	16	8	4	2	1
$x-4$	-1	-2	-4	-8	-16
$y-4$	-16	-8	-4	-2	-1

x	5	6	8	12	20
y	20	12	8	6	5
x	3	2	0	-4	-12
y	-12	-4	0	2	3

(2) 已知 a、b 為整數，滿足 $\left(\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}-\dfrac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\right)=3$，則 $a+b$ 的值可能為多少？

$$\left(\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{b-a}{ab}}-\dfrac{\frac{1}{b}}{\frac{a+b}{ab}}\right)\times\left(\frac{b-a}{ab}\right)\times\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)=3$$

$$\left(\frac{b}{b-a}-\frac{a}{a+b}\right)\times\left(\frac{b-a}{ab}\right)\times\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)=3$$

$$\frac{a^2+b^2}{(b-a)(a+b)}\times\frac{(b-a)}{ab}\times\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=3$$

$$\frac{ab}{a+b}=3$$

$\therefore ab-3a-3b=0$

$ab-3a-3b+9=9$

$b(a-3)-3(a-3)=9$

$(a-3)(b-3)=9$

列表如右：

$\therefore a+b=16$ 或 12 或 -4。

$a-3$	1	3	9	-1	-3	-9
$b-3$	9	3	1	-9	-3	-1

a	4	6	12	2	0	-6
b	12	6	4	-6	0	2

第 4 章　一元二次方程式

1 方程式的解（難度★★★★☆）

若 x、y 為整數，滿足方程式 $(x+y+2)^2=(x-4)(y+6)$ 的解為何？

設 $A=x-4$，$B=y+6$，$A+B=x+y+2$，

代入原方程式可得 $(A+B)^2=A\times B$，$A^2+AB+B^2=0$

$$A=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4\times1\times B^2}}{2\times1}=\frac{-B\pm\sqrt{-3B^2}}{2}$$

因爲 x、y 爲整數，所以 $-3B^2=0$，$B=0$，

將 $B=0$ 代回得 $y=-6$。

又 $A=\dfrac{-B\pm\sqrt{-3B^2}}{2}=0$，

所以 $x-4=0$，$x=4$

故此方程式的解爲 $x=4$，$y=-6$。

2 配方法（難度★★★★☆）

若 $a\geq1$，$b\geq-2$，$c\geq3$ 且 $a+b+c+4=2\sqrt{a-1}+4\sqrt{b+2}+2\sqrt{c-3}$，則 $a^2+b^2+c^2$ 的值為多少？

$a+b+c+4=2\sqrt{a-1}+4\sqrt{b+2}+2\sqrt{c-3}$

$(a-2\sqrt{a-1})+(b-4\sqrt{b+2})+(c-2\sqrt{c-3})+4=0$

$(a-2\sqrt{a-1})+(b-4\sqrt{b+2}+6)+(c-2\sqrt{c-3}-2)=0$

$[(\sqrt{a-1})^2-2\sqrt{a-1}+1^2]+[(\sqrt{b+2})^2-4\sqrt{b+2}+2^2]+[(\sqrt{c-3})^2-2\sqrt{c-3}+1^2]=0$

$(\sqrt{a-1}-1)^2+(\sqrt{b+2}-2)^2+(\sqrt{c-3}-1)^2=0$

$\sqrt{a-1}=1$，$a-1=1$，$a=2$

$\sqrt{b+2}=2$，$b+2=4$，$b=2$

$\sqrt{c-3}=1$，$c-3=1$，$c=4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=2^2+2^2+4^2=24$

3 相異兩實根（難度★★★★☆）

若 a、b 為 0、1、2、3、4、5 中的任意數，滿足方程式 $x^2+ax+b=0$ 有兩個相異的整數解，則（a,b）共有多少組解？

方程式 $x^2+ax+b=0$，利用公式解可得 $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$，

若 x 爲整數解，則 a^2-4b 爲完全平方數。

(1)當 $b=0$ 時，$a=1,2,3,4,5$ 代入 $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4\times0}}{2}$，皆可得兩個相異整數解。

(2)當 $b=2$ 時，只有 $a=3$ 代入 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2}}{2}$ 可得兩個相異整數解。

(3)當 $b=3$ 時，只有 $a=4$ 代入 $x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times3}}{2}$ 可得兩個相異整數解。

(4)當 $b=4$ 時，只有 $a=5$ 代入 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times4}}{2}$ 可得兩個相異整數解。

由以上可知，滿足條件的（a,b）共有八組解。

4 一元二次方程式的應用問題（難度★★★★★）

若兩個正整數的和比乘積小 944，且其中一個正整數為完全平方數，則兩正整數分別為何？

設兩正整數爲 x^2、y，由題意可列出方程式爲 $x^2y-(x^2+y)=944$，

$x^2y-x^2-y+1=944+1$

$x^2(y-1)-(y-1)=945$

$(x^2-1)(y-1)=945$

$(x+1)(x-1)(y-1)=945$

$\because$（$x+1$）與（$x-1$）相差 2，且 $945=3^3\times5\times7$

$\therefore (x+1)(x-1)(y-1)=3\times1\times(3^2\times5\times7)$ 或 $5\times3\times(3^2\times7)$ 或 $7\times5\times(3^3)$ 或 $3^2\times7\times(3\times5)$，

$x+1$	3	5	7	9
$x-1$	1	3	5	7
$y-1$	$3^2\times5\times7=315$	$3^2\times7=63$	$3^3=27$	$3\times5=15$

得

x	2	4	6	8
y	316	64	28	16

，即

x^2	4	16	36	64
y	316	64	28	16

故兩正整數爲 4、316 或 16、64 或 36、28。

5 代換法（難度★★★★☆）

已知（$2017-a$）（$2018-a$）$=2020$，則（$2017-a)^2+(2018-a)^2$ 的值為多少？

令 $x=2017-a$，則 $2018-a=x+1$

$x(x+1)=2020$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^2+(x+1)^2&=2x^2+2x+1\\&=2x(x+1)+1\\&=2\times2020+1\\&=4041\end{aligned}$$

6 根與係數的應用（難度★★★★★）

已知 m、n 為 $x^2-4x+1=0$ 的兩根，$m(m+1)$、$n(n+1)$ 為 $x^2+ax+b=0$ 的兩根，求一元二次方程式 $x^2+(a+5)x+2b=0$ 的解。

已知一元二次方程式 $Ax^2+Bx+C=0$ 的兩根和爲 $-\dfrac{B}{A}$，兩根乘積爲 $\dfrac{C}{A}$，

所以 $m+n=-\dfrac{-4}{1}=4$，$mn=\dfrac{1}{1}=1$。

① $m(m+1)+n(n+1)=-\dfrac{a}{1}$

$m^2+m+n^2+n=-a$

$(m+n)^2-2mn+(m+n)=-a$

$16-2+4=-a$，$a=-18$

② $m(m+1)\times n(n+1)=\dfrac{b}{1}$

$mn(m+1)(n+1)=b$

$mn(mn+m+n+1)=b$

$1\times(1+4+1)=b$，$b=6$

將 $a=-18$，$b=6$ 代入一元二次方程式 $x^2+(a+5)x+2b=0$ 得

$x^2+(-18+5)x+2\times6=0$

$x^2-13x+12=0$

$(x-1)(x-12)=0$

$x=1$ 或 $x=12$

故 $x^2+(a+5)x+2b=0$ 的解爲 1 與 12。

第 5 章　統計資料處理

1 相對次數分配（難度★★★★☆）

下表為童軍團 50 位學生身高的相對次數分配表，若 $7a-4c=1$，且 f 為 d 的 2 倍少 4，相對次數與次數為固定倍數關係，則身高為 160～170 公分的人數占全部的多少百分比？

身高（公分）	145～150	150～155	155～160	160～165	165～170	170～175	合計
次數（人）	4	a	10	b	c	6	50
相對次數（%）	8	d	20	e	f	12	100

依題目可列出聯立方程式$\begin{cases}7a-4c=1\\ f=2d-4\end{cases}$，觀察上表可知 $d=2a$，$f=2c$

因此，可整理得$\begin{cases}7a-4c=1\\ 2c=2\times2a-4\end{cases}$，即$\begin{cases}7a-4c=1\\ c=2a-2\end{cases}$，$7a-4(2a-2)=1$，解得 $a=7$

代入解得 $c=12$，$b=50-4-7-10-12-6=11$

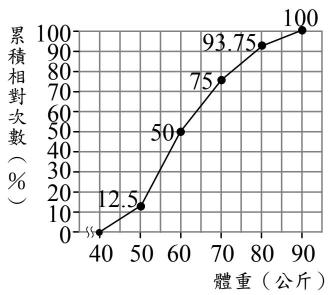
$\dfrac{11+12}{50}=\dfrac{23}{50}=46\%$，即 160～170 公分的人數占全部的 46%。

2 累積相對次數分配（難度★★★★☆）

右圖為八年甲班 32 位學生體重的累積相對次數分配折線圖，若該班 32 位學生的平均體重為 x 公斤，則 x 之值介於下列哪一個選項？

(A) 60～61　(B) 61～62

(C) 62～63　(D) 63～64



八年甲班學生體重累積相對次數分配折線圖

由圖可知，40～50 公斤者占 12.5%，共有 $32\times12.5\%=4$（人）

50～60 公斤者占 $50\%-12.5\%=37.5\%$，共有 $32\times37.5\%=12$（人）

60～70 公斤者占 $75\%-50\%=25\%$，共有 $32\times25\%=8$（人）

70～80 公斤者占 $93.75\%-75\%=18.75\%$，共有 $32\times18.75\%=6$（人）

80～90 公斤者占 $100\%-93.75\%=6.25\%$，共有 $32\times6.25\%=2$（人）

$$\frac{45\times4+55\times12+65\times8+75\times6+85\times2}{32}=\frac{180+660+520+450+170}{32}=\frac{1980}{32}=61.875$$

故選(B)。

3 累積次數分配（難度★★★★☆）

下表為統計全班 25 位學生同住家庭人數的累積次數分配表，已知該班的同住家庭人數平均為 3.8 人，且 $a=2b-2$，求 a、b 的值。

同住家庭人數（人）	1	2	3	4	5	6	7	8
累積次數（人）	0	4	b	18	21	a	25	25

由同住家庭人數平均爲 3.8 人，可得

$7\times(25-a)+6\times(a-21)+5\times(21-18)+4\times(18-b)+3\times(b-4)+2\times(4-0)$

$=25\times3.8$

$175-7a+6a-126+15+72-4b+3b-12+8=95$，$-a-b=-37$

又由題目可知 $a=2b-2$，則可列出聯立方程式 $\begin{cases}-a-b=-37\\ a=2b-2\end{cases}$，整理得 $\begin{cases}a+b=37\\ a-2b=-2\end{cases}$，

解得 $3b=39$，$b=13$，代入解得 $a=24$。

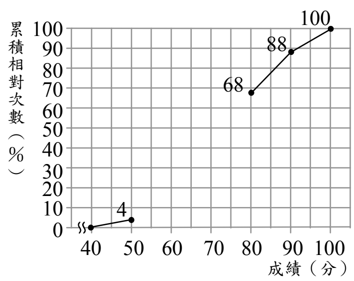
4 統計圖表的應用（難度★★★★★）

右表為某校八年級所有學生這次數學段考成績的次數分配表，右圖為其累積相對次數分配折線圖，已知表中與圖中都有些部分被塗掉，回答下列問題：

(1)該校八年級學生共有多少人？

(2)這次數學段考成績的中位數在哪一組？

數學成績（分）	次數（人）
40～50	●
50～60	60
60～70	●
70～80	45
80～90	75
90～100	●



八年級學生數學成績累積相對次數分配折線圖

(1) $88\%-68\%=20\%$，設全部學生有 x 人，則 $\dfrac{75}{x}=20\%$，即 $\dfrac{75}{x}=\dfrac{1}{5}$，

解得 $x=375$，故八年級學生共有 375 人。

(2) 由圖可知，40～50 分這組占全部的 4%，即有 $375\times4\%=15$（人）

90～100 分這組占全部的 $100\%-88\%=12\%$，即有 $375\times12\%=45$（人）

60～70 分這組有 $375-45-75-45-60-15=135$（人）

因爲 375 爲奇數，所以此筆資料的中位數即爲由小到大排列的第 $\dfrac{375+1}{2}=188$ 筆數據，

$15+60=75$，$75+135=210$

故中位數在 60～70 分這一組。

第 1 章 乘法公式與多項式

1.

(1) $A=2017^2+2017+2019$

$B=2017^2-2017-2015$

$A+B=(2017^2+2017+2019)+(2017^2-2017-2015)$

$=2\times2017^2+4$

$=2\times(2017^2+2)$

$A-B=(2017^2+2017+2019)-(2017^2-2017-2015)$

$=2017+2017+2019+2015$

$=8068$

$\because k=A^2-B^2$

$=(A+B)(A-B)$

$=2\times(2017^2+2)\times8068$

其中 2017^2+2 的值不爲 2 的倍數，

又 $8068=2^2\times2017$

$\therefore k$ 的標準分解式中 2 的次方爲 3 次。

(2) $\frac{1}{4}(b-c)^2=(a-b)(c-a)$

$(b-c)^2=4(a-b)(c-a)$

$b^2-2bc+c^2=4ac-4a^2-4bc+4ab$

$4a^2+b^2+c^2-4ab+2bc-4ac=0$

$4a^2-4ab+b^2-4ac+2bc+c^2=0$

$(2a-b)^2-2c(2a-b)+c^2=0$

$(2a-b-c)^2=0$

$\therefore 2a-b-c=0$

$b+c=2a$

$\frac{b+c}{a}=2$

2.

(1)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x\ -2 \\
\cline{2-2}
2x^2-x-5 & 6x^3-7x^2-13x-4 \\
 & 6x^3-3x^2-15x \\
\cline{2-2}
 & \qquad -4x^2+2x-4 \\
 & \qquad -4x^2+2x+10 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad -14
\end{array}
$$

因爲 $6x^3-7x^2-13x-4$

$=(2x^2-x-5)(3x-2)-14$

所以當 $2x^2-x-5=0$ 時，

$6x^3-7x^2-13x-4$ 的值爲 -14。

(2)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x\ +3 \\
\cline{2-2}
x^2+2x-15 & 4x^3+11x^2-50x+50 \\
 & 4x^3+8x^2-60x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 3x^2+10x+50 \\
 & \qquad 3x^2+6x-45 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 4x+95
\end{array}
$$

因爲 $4x^3+11x^2-50x+50$

$=(x^2+2x-15)(4x+3)+(4x+95)$

又 $x^2+2x-15=0$

$(x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-5$ 或 $x=3$

故當 $x^2+2x-15=0$ 時，

$4x^3+11x^2-50x+50$ 的值爲 $4x+95$，

因此，可得

$4\times(-5)+95=75$ 或 $4\times3+95=107$。

3.

將 $x=1$ 代入原式得 $a+b+c+d-15=2017$

$\therefore a+b+c+d=2032$，

將 $x=-1$ 代入原式得

$y=-a-b-c-d-15$

$=-(a+b+c+d)-15$

$=-2032-15$

$=-2047$

4.

$$
\begin{array}{r|l}
 & ax^3 \qquad -2ax+1 \\
x^2+0x+2 & ax^5+0x^4+0x^3+x^2+4x+b \\
 & ax^5+0x^4+2ax^3 \\ \hline
 & \qquad -2ax^3+x^2+4x \\
 & \qquad -2ax^3+0x^2-4ax \\ \hline
 & \qquad\qquad x^2+(4+4a)x+b \\
 & \qquad\qquad x^2+0x+2 \\ \hline
 & \qquad\qquad (4+4a)x+(b-2)
\end{array}
$$

$\therefore 4+4a=0$，$a=-1$

$b-2=0$，$b=2$

第 2 章　二次方根與畢氏定理

1.

(1) $\because 0<x<1$，$\therefore \dfrac{1}{x}>1$

則 $x+\dfrac{1}{x}>0$，$x-\dfrac{1}{x}<0$，

同理，$2x+\dfrac{3}{x}>0$，$2x-\dfrac{3}{x}<0$

$a=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+2}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}$

$=\sqrt{(x+\dfrac{1}{x})^2}+\sqrt{(x-\dfrac{1}{x})^2}$

$=(x+\dfrac{1}{x})-(x-\dfrac{1}{x})$

$=\dfrac{2}{x}$

$b=\sqrt{4x^2+\dfrac{9}{x^2}+12}-\sqrt{4x^2+\dfrac{9}{x^2}-12}$

$=\sqrt{(2x+\dfrac{3}{x})^2}-\sqrt{(2x-\dfrac{3}{x})^2}$

$=(2x+\dfrac{3}{x})+(2x-\dfrac{3}{x})$

$=4x$

故 $a\times b=\dfrac{2}{x}\times 4x=8$

(2) $\sqrt{2021\frac{4}{2025}}=\sqrt{2025-4+\frac{4}{2025}}$

$=\sqrt{(45-\frac{2}{45})^2}$

$=44\frac{43}{45}$

$\sqrt{231\frac{9}{225}}=\sqrt{225+6+\frac{9}{225}}$

$=\sqrt{(15+\frac{3}{15})^2}$

$=15\frac{3}{15}$

$\therefore\sqrt{2021\frac{4}{2025}}-\sqrt{231\frac{9}{225}}$

$=44\frac{43}{45}-15\frac{3}{15}$

$=44\frac{43}{45}-15\frac{9}{45}$

$=29\frac{34}{45}$

2.

$\sqrt{21+8\sqrt{5}}=\sqrt{21+2\sqrt{80}}$

$=\sqrt{(\sqrt{16}+\sqrt{5})^2}$

$=4+\sqrt{5}$

$\because 4+\sqrt{5}$ 的整數部分爲 6

$\therefore$小數部分爲$(4+\sqrt{5})-6=\sqrt{5}-2$

$a^2+\frac{1}{a}=(\sqrt{5}-2)^2+(\frac{1}{\sqrt{5}-2})$

$=5-4\sqrt{5}+4+\frac{1\times(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)\times(\sqrt{5}+2)}$

$=9-4\sqrt{5}+\sqrt{5}+2$

$=11-3\sqrt{5}$

3.

將 $x=2$ 代入直線得

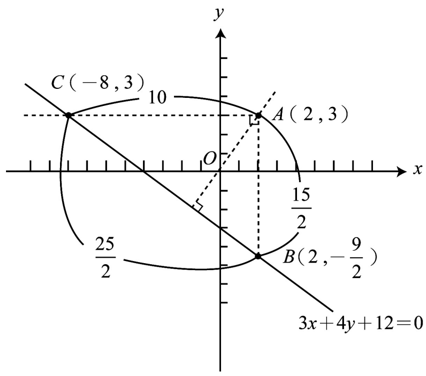
$3\times2+4y=-12$，$y=-\frac{9}{2}$，

故可得 $B(2,-\frac{9}{2})$。

將 $y=3$ 代入直線得

$3x+4\times3=-12$，$x=-8$，

故可得 $C(-8,3)$。



得 $\overline{AB}=|-\frac{9}{2}-3|=\frac{15}{2}$

$\overline{AC}=|-8-2|=10$

$\overline{BC}=\sqrt{10^2+(\frac{15}{2})^2}=\frac{25}{2}$

所以 A 點到直線 $3x+4y+12=0$ 的距離

$=\frac{\overline{AB}\times\overline{AC}}{\overline{BC}}$

$=\frac{\frac{15}{2}\times10}{\frac{25}{2}}$

$=6$

4.

設兩股長分別爲 a、b 公分，

$$\begin{cases} a+b=63 \\ a^2+b^2=45^2 \end{cases}$$

又 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+b^2+2ab$

$\therefore\ 63^2=45^2+2ab$

$$\begin{aligned} 2ab&=63^2-45^2 \\ &=(63+45)(63-45) \\ &=108\times18 \\ &=1944 \\ ab&=972 \end{aligned}$$

故此直角三角形的面積

$=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times972=486$（平方公分）。

5.

由直角三角形的三邊長爲 a、b、c，

其中 c 爲斜邊可得 $a^2+b^2=c^2$，

由 h 爲斜邊上的高，可得 $h=\frac{ab}{c}$，$hc=ab$

$$\begin{aligned} (a+b)^2+h^2&=a^2+2ab+b^2+h^2 \\ &=a^2+b^2+2ab+h^2 \\ &=c^2+2ch+h^2 \\ &=(c+h)^2 \end{aligned}$$

由於三邊長符合畢氏定理，故三邊長爲

$c+h$、$a+b$、h 的三角形爲直角三角形。

第 3 章　因式分解

1.

設另一股長爲 a，斜邊長爲 b，

由畢氏定理可知 $a^2+p^2=b^2$

$$\begin{aligned} b^2-a^2&=p^2 \\ (b+a)(b-a)&=p^2 \end{aligned}$$

已知 p^2 爲質數，故 $(b-a)=1$，$(b+a)=p^2$，

所以周長 $=a+b+p=p^2+p$

又 $\begin{cases} b+a=p^2 & \cdots\cdots ① \\ b-a=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

由①式－②式得 $2a=p^2-1$，$a=\frac{p^2-1}{2}$

故面積 $=\frac{a\times p}{2}$

$=\left(\frac{p^2-1}{2}\right)\times p\times\frac{1}{2}$

$=\frac{p^3-p}{4}$。

2.

$8k^2-2k-15=(2k-3)(4k+5)$ 爲質數

$$\begin{array}{ccc} 2k & \times & -3 \\ 4k & & +5 \\ \hline -12k & + & 10k = -2k \end{array}$$

若 $2k-3=1$，$k=2$，

則 $p=4\times2+5=13$，

$\therefore p\times k=26$，

若 $4k+5=1$，$k=-1$，

則 $p=2\times(-1)-3=-5$（不合）

故 $p\times k$ 的值爲 26。

3.

(1)【解一】

$(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)-840$

$=(x+3)(x+6)(x+4)(x+5)-840$

$=(x^2+9x+18)(x^2+9x+20)-840$

令 $A=x^2+9x$

則原式 $=(A+18)(A+20)-840$

$=A^2+38A+360-840$

$=A^2+38A-480$

$=(A-10)(A+48)$

$=(x^2+9x-10)(x^2+9x+48)$

$=(x+10)(x-1)(x^2+9x+48)$

【解二】

$(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)-840$

$=(x+3)(x+6)(x+4)(x+5)-840$

$=(x^2+9x+18)(x^2+9x+20)-840$

$=(x^2+9x)^2+38(x^2+9x)+360-840$

$=(x^2+9x)^2+38(x^2+9x)-480$

$=(x^2+9x-10)(x^2+9x+48)$

$=(x+10)(x-1)(x^2+9x+48)$

(2)【解一】

$(x+2)(x+3)(x+4)(x+6)-30x^2$

$=(x+2)(x+6)(x+3)(x+4)-30x^2$

$=(x^2+8x+12)(x^2+7x+12)-30x^2$

令 $A=x^2+12$

則原式 $=(A+8x)(A+7x)-30x^2$

$=A^2+15Ax+56x^2-30x^2$

$=A^2+15Ax+26x^2$

$=(A+13x)(A+2x)$

$=(x^2+13x+12)(x^2+2x+12)$

$=(x+1)(x+12)(x^2+2x+12)$

【解二】

$(x+2)(x+3)(x+4)(x+6)-30x^2$

$=(x+2)(x+6)(x+3)(x+4)-30x^2$

$=(x^2+8x+12)(x^2+7x+12)-30x^2$

$=(x^2+12)^2+15x(x^2+12)+56x^2-30x^2$

$=(x^2+12)^2+15x(x^2+12)+26x^2$

$=(x^2+13x+12)(x^2+2x+12)$

$=(x+1)(x+12)(x^2+2x+12)$

$$\begin{array}{ccc} (x^2+12) & \times & +\ 2x \\ (x^2+12) & & +13x \\ \hline \multicolumn{3}{c}{2x(x^2+12)+13x(x^2+12)=15x(x^2+12)} \end{array}$$

4.

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$，等號兩邊同乘 $4xy$ 得

$4y+4x=xy$

$xy-4x-4y=0$

$xy-4x-4y+16=16$

$x(y-4)-4(y-4)=16$

$(x-4)(y-4)=16$

列表如下：

$x-4$	1	2	4	8	16
$y-4$	16	8	4	2	1
$x-4$	-1	-2	-4	-8	-16
$y-4$	-16	-8	-4	-2	-1

x	5	6	8	12	20
y	20	12	8	6	5
x	3	2	0	-4	-12
y	-12	-4	0	2	3

$\therefore x+y$ 的最大值爲 $20+5=25$

最小值爲 $8+8=16$

(2)

$$\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{b-a}{ab}}-\frac{\frac{1}{b}}{\frac{a+b}{ab}}\right)\times\left(\frac{b-a}{ab}\right)\times\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)=3$$

$$\left(\frac{b}{b-a}-\frac{a}{a+b}\right)\times\left(\frac{b-a}{ab}\right)\times\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)=3$$

$$\frac{a^2+b^2}{(b-a)(a+b)}\times\frac{(b-a)}{ab}\times\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=3$$

$$\frac{ab}{a+b}=3$$

$\therefore ab-3a-3b=0$

$ab-3a-3b+9=9$

$b(a-3)-3(a-3)=9$

$(a-3)(b-3)=9$

列表如下：

$a-3$	1	3	9
$b-3$	9	3	1
$a-3$	-1	-3	-9
$b-3$	-9	-3	-1

a	4	6	12
b	12	6	4
a	2	0	-6
b	-6	0	2

$\therefore a+b=16$ 或 12 或 -4。

第 4 章　一元二次方程式

1.

設 $A=x-4$，$B=y+6$，

$A+B=x+y+2$

代入原方程式可得

$(A+B)^2=A\times B$

$A^2+AB+B^2=0$

$$A=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4\times1\times B^2}}{2\times1}$$

$$=\frac{-B\pm\sqrt{-3B^2}}{2}$$

因爲 x、y 爲整數，

所以 $-3B^2=0$，$B=0$，

將 $B=0$ 代回得 $y=-6$。

又 $A=\dfrac{-B\pm\sqrt{-3B^2}}{2}=0$，

所以 $x-4=0$，$x=4$

故此方程式的解爲 $x=4$，$y=-6$。

2.

$a+b+c+4=2\sqrt{a-1}+4\sqrt{b+2}+2\sqrt{c-3}$

$(a-2\sqrt{a-1})+(b-4\sqrt{b+2})+(c-2\sqrt{c-3})+4=0$

$(a-2\sqrt{a-1})+(b-4\sqrt{b+2}+6)$

$+(c-2\sqrt{c-3}-2)=0$

$[(\sqrt{a-1})^2-2\sqrt{a-1}+1^2]+[(\sqrt{b+2})^2-4\sqrt{b+2}+2^2]+[(\sqrt{c-3})^2-2\sqrt{c-3}+1^2]=0$

$(\sqrt{a-1}-1)^2+(\sqrt{b+2}-2)^2+(\sqrt{c-3}-1)^2=0$

$\sqrt{a-1}=1$，$a-1=1$，$a=2$

$\sqrt{b+2}=2$，$b+2=4$，$b=2$

$\sqrt{c-3}=1$，$c-3=1$，$c=4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=2^2+2^2+4^2=24$

3.

方程式 $x^2+ax+b=0$，

利用公式解可得 $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$，

若 x 爲整數解，則 a^2-4b 爲完全平方數。

(1) 當 $b=0$ 時，

$a=1,2,3,4,5$ 代入

$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4\times 0}}{2}$，

皆可得兩個相異整數解。

(2) 當 $b=2$ 時，

只有 $a=3$ 代入 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 2}}{2}$

可得兩個相異整數解。

(3) 當 $b=3$ 時，

只有 $a=4$ 代入 $x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times 3}}{2}$

可得兩個相異整數解。

(4) 當 $b=4$ 時，

只有 $a=5$ 代入 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times 4}}{2}$

可得兩個相異整數解。

由以上可知，滿足條件的 (a,b) 共有八組解。

4.

設兩正整數爲 x^2、y，

由題意可列出方程式爲

$x^2y-(x^2+y)=944$，

$x^2y-x^2-y+1=944+1$

$x^2(y-1)-(y-1)=945$

$(x^2-1)(y-1)=945$

$(x+1)(x-1)(y-1)=945$

$\because$ $(x+1)$ 與 $(x-1)$ 相差 2，

且 $945=3^3\times 5\times 7$

$\therefore$ $(x+1)(x-1)(y-1)$

$=3\times 1\times(3^2\times 5\times 7)$ 或 $5\times 3\times(3^2\times 7)$

或 $7\times 5\times(3^3)$ 或 $3^2\times 7\times(3\times 5)$，

$x+1$	3	5
$x-1$	1	3
$y-1$	$3^2\times 5\times 7=315$	$3^2\times 7=63$
$x+1$	7	9
$x-1$	5	7
$y-1$	$3^3=27$	$3\times 5=15$

得

x	2	4	6	8
y	316	64	28	16

即

x^2	4	16	36	64
y	316	64	28	16

故兩正整數爲 4、316 或 16、64 或 36、28。

5.

令 $x=2017-a$，

則 $2018-a=x+1$

$x(x+1)=2020$

$\therefore x^2+(x+1)^2=2x^2+2x+1$

$=2x(x+1)+1$

$=2\times 2020+1$

$=4041$

6.

已知一元二次方程式 $Ax^2+Bx+C=0$ 的

兩根和爲 $-\dfrac{B}{A}$，兩根乘積爲 $\dfrac{C}{A}$，

所以 $m+n=-\dfrac{-4}{1}=4$，$mn=\dfrac{1}{1}=1$。

① $m(m+1)+n(n+1)=-\dfrac{a}{1}$

$m^2+m+n^2+n=-a$

$(m+n)^2-2mn+(m+n)=-a$

$16-2+4=-a$，$a=-18$

② $m(m+1)\times n(n+1)=\dfrac{b}{1}$

$mn(m+1)(n+1)=b$

$mn(mn+m+n+1)=b$

$1\times(1+4+1)=b$，$b=6$

將 $a=-18$，$b=6$ 代入一元二次方程式

$x^2+(a+5)x+2b=0$ 得

$x^2+(-18+5)x+2\times 6=0$

$x^2-13x+12=0$

$(x-1)(x-12)=0$

$x=1$ 或 $x=12$

故 $x^2+(a+5)x+2b=0$ 的解爲 1 與 12。

第 5 章 統計資料處理

1.

依題目可列出聯立方程式 $\begin{cases}7a-4c=1\\ f=2d-4\end{cases}$，

觀察上表可知 $d=2a$，$f=2c$

因此，可整理得 $\begin{cases}7a-4c=1\\ 2c=2\times 2a-4\end{cases}$，

即 $\begin{cases}7a-4c=1\\ c=2a-2\end{cases}$，$7a-4(2a-2)=1$

解得 $a=7$

代入解得 $c=12$

$b=50-4-7-10-12-6=11$

$\dfrac{11+12}{50}=\dfrac{23}{50}=46\%$

即 160～170 公分的人數占全部的 46%。

2.

由圖可知，

40～50 公斤者占 12.5%，

共有 $32\times 12.5\%=4$（人）

50～60 公斤者占 $50\%-12.5\%=37.5\%$，

共有 $32\times 37.5\%=12$（人）

60～70 公斤者占 $75\%-50\%=25\%$，

共有 $32\times 25\%=8$（人）

70～80 公斤者占 $93.75\%-75\%=18.75\%$，

共有 $32\times 18.75\%=6$（人）

80～90 公斤者占 $100\%-93.75\%=6.25\%$，

共有 $32\times 6.25\%=2$（人）

$\dfrac{45\times 4+55\times 12+65\times 8+75\times 6+85\times 2}{32}$

$=\dfrac{180+660+520+450+170}{32}$

$=\dfrac{1980}{32}$

$=61.875$

故選(B)。

3.

由同住家庭人數平均爲 3.8 人，可得

$7\times(25-a)+6\times(a-21)+5\times(21-18)$

$+4\times(18-b)+3\times(b-4)+2\times(4-0)$

$=25\times3.8$

$175-7a+6a-126+15+72-4b+3b-12$

$+8=95$

$-a-b=-37$

又由題目可知 $a=2b-2$，

則可列出聯立方程式 $\begin{cases}-a-b=-37\\a=2b-2\end{cases}$，

整理得 $\begin{cases}a+b=37\\a-2b=-2\end{cases}$，

解得 $3b=39$，$b=13$

代入解得 $a=24$。

4.

(1) $88\%-68\%=20\%$

設全部學生有 x 人，

則 $\dfrac{75}{x}=20\%$，即 $\dfrac{75}{x}=\dfrac{1}{5}$，解得 $x=375$

故八年級學生共有 375 人。

(2) 由圖可知，

40～50 分這組占全部的 4%，

即有 $375\times4\%=15$（人）

90～100 分這組占全部的

$100\%-88\%=12\%$，

即有 $375\times12\%=45$（人）

60～70 分這組有

$375-45-75-45-60-15=135$（人）

因爲 375 爲奇數，

所以此筆資料的中位數即爲由小到大排列的

第 $\dfrac{375+1}{2}=188$ 筆數據，

$15+60=75$

$75+135=210$

故中位數在 60～70 分這一組。