第 1 章　數列與級數

1 圖形的規律變化（難度★★★★☆）

品馨依序在 3×3、4×4、5×5 的正方形格子中填入數字，如圖一、圖二、圖三所示，觀察圖形中的數字規律，則圖八中所有數字的總和為何？

1	2	3
1	2	2
1	1	1

圖一

1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

圖二

1	2	3	4	5
1	2	3	4	4
1	2	3	3	3
1	2	2	2	2
1	1	1	1	1

圖三

……

1	2	3
1	2	2
1	1	1

圖一

1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

圖二

1	2	3	4	5
1	2	3	4	4
1	2	3	3	3
1	2	2	2	2
1	1	1	1	1

圖三

……

圖一數字總和$=1+(1+2+1)+(1+2+3+2+1)=1^2+2^2+3^2=14$

圖二數字總和$=1+(1+2+1)+(1+2+3+2+1)+(1+2+3+4+3+2+1)$

$=1^2+2^2+3^2+4^2=30$

圖三數字總和$=1+(1+2+1)+(1+2+3+2+1)+(1+2+3+4+3+2+1)$

$+(1+2+3+4+5+4+3+2+1)=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$

⋮

圖八數字總和$=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+10^2=385$

2 等差級數和（難度★★★☆☆）

有一個等差數列共 25 項，首項為−35，公差為 4，已知 $S_{25}=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{25}$，$S'_{25}=|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_{25}|$，則 $S'_{25}-S_{25}=$？

$a_1=-35$，$d=4$

$a_n=a_1+(n-1)d$

又 $a_9=a_1+8d=-3$，$a_{10}=a_1+9d=1$，

故可知 a_1、a_2、……、a_9 爲負數，a_{10}、a_{11}、……、a_{25} 爲正數。

$S'_{25}-S_{25}=|a_1|+\cdots\cdots+|a_9|+\cancel{|a_{10}|+\cdots\cdots+|a_{25}|}-a_1-\cdots\cdots-a_9\cancel{-a_{10}-\cdots\cdots-a_{25}}$

$=2\times(|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_9|)$

$=2\times|a_1+a_2+\cdots\cdots+a_9|$

$=2\times\left|\dfrac{9[-35+(-3)]}{2}\right|$

$=9\times38$

$=342$

3 等差級數的應用（難度★★★☆☆）

品馨熱愛研讀數學科普書籍，今日她正在閱讀《為什麼公車一次來三班？》這本書，此書頁碼依序為 1、2、……至 n，則：

(1) 當品馨將這些頁碼的數字全部加起來時，不小心將其中一個頁碼多加了一次，得到的總和為 52863，則這個被加了兩次的頁碼數字為何？

設被加了兩次的頁碼數字爲 k，且 $k<n$

得到的總和$=\dfrac{(1+n)\times n}{2}<52863$

$n\times(1+n)<105726$

當 $n=325$，$325\times326=105950$（不合）

當 $n=324$，$324\times325=105300$（合）

當 $n=323$，$323\times324=104652$（合）

當 $n=324$ 時，$k=52863-\dfrac{105300}{2}=213$

當 $n=323$ 時，$k=52863-\dfrac{104652}{2}=537$（不合）

故被加了兩次的頁碼數字爲 213。

(2) 承第(1)題，若頁碼為 5 視為 1 個數字；頁碼為 12 視為兩個數字；頁碼為 298 視為 3 個數字，則這本數學科普書籍的頁碼，一共有幾個數字？

由(1)可知共有 324 頁。

1 個數字：1～9，共有 $1\times9=9$（個）

2 個數字：10～99，共有 $2\times90=180$（個）

3 個數字：100～324，共有 $3\times225=675$（個）

$\therefore$ 一共有 $9+180+675=864$ 個數字。

4 等差中項與等比中項的應用（難度★★★☆☆）

若兩正數 a、b 的等差中項為 16，等比中項為 $4\sqrt{5}$，求 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$ 的值。

因爲 a、b 的等差中項爲 16，所以 $\dfrac{a+b}{2}=16$，$a+b=32$

因爲 a、b 的等比中項爲 $4\sqrt{5}$，所以 $a\times b=(4\sqrt{5})^2$，$ab=80$

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{b^2}{ab}+\dfrac{a^2}{ab}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$，又 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

故 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\dfrac{32^2-2\times 80}{80}=\dfrac{864}{80}=\dfrac{54}{5}$

5 等比數列的應用（難度★★★★☆）

小鷗將等比數列 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , ……依序排列，依右圖的方式填入空格中，若第 20 層由左至右算起的第 10 個數為 2^x，則 $x=$？

第 1 層	1				
第 2 層	2	4			
第 3 層	8	16	32		
第 4 層	64				
第 5 層					
⋮			⋮		

等比數列 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , …… 依序排列，
可得第 n 個數 $a_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$。

如圖，第 1 層至第 19 層共有 $\dfrac{(1+19)\times 19}{2}=\dfrac{20\times 19}{2}=190$（個），

即第 20 層由左至右算起的第 10 個數，是從第 1 層算起的第 $190+10=200$ 個數。
第 200 個數爲 $a_{200}=2^{200-1}=2^{199}$，
故 $x=199$。

第 2 章　線型函數與其圖形

1 函數值（難度★★★★☆）

若函數 $y=\frac{2022}{2023}x+\frac{2023}{2024}$，則：

(1) $\frac{(x=54321\text{的函數值})-(x=12345\text{的函數值})}{54321-12345}$ 的值為多少？

$\frac{(x=54321\text{的函數值})-(x=12345\text{的函數值})}{54321-12345}$

$=\frac{\left(\frac{2022}{2023}\times 54321+\frac{2023}{2024}\right)-\left(\frac{2022}{2023}\times 12345+\frac{2023}{2024}\right)}{54321-12345}$

$=\frac{\frac{2022}{2023}\times(54321-12345)}{54321-12345}$

$=\frac{2022}{2023}$

(2) 當 $-2026\leq x\leq 2020$ 時，y 的最大值為 a、最小值為 b，則 $a-b$ 的值為多少？

$a=\frac{2022}{2023}\times 2020+\frac{2023}{2024}$，

$b=\frac{2022}{2023}\times(-2026)+\frac{2023}{2024}$，

所以 $a-b=\left[\frac{2022}{2023}\times 2020+\frac{2023}{2024}\right]-\left[\frac{2022}{2023}\times(-2026)+\frac{2023}{2024}\right]$

$=\frac{2022}{2023}\times(2020+2026)$

$=\frac{2022}{2023}\times 4046$

$=4044$。

2 函數結合規律（難度★★★★★）

已知函數 y 滿足下列性質：

①$x=1$ 的函數值為 1　②若 n 為正整數，$x=3n$ 的函數值為 $n\times$（$x=n$ 的函數值），求：

(1) $x=81$ 的函數值。

(2) $x=3^{27}$ 的函數值。

(1) $n=1$ 時，$x=3$，其函數值為 $1\times$（$x=1$ 的函數值），即 $1\times1=1$

$n=3$ 時，$x=3\times3=9$，其函數值為 $3\times$（$x=3$ 的函數值），即 $3\times1=3$

$n=9$ 時，$x=3\times9=27$，其函數值為 $9\times$（$x=9$ 的函數值），即 $9\times3=27$

$n=27$ 時，$x=3\times27=81$，其函數值為 $27\times$（$x=27$ 的函數值），即 $27\times27=729$

(2)觀察上列關係式得到 $x=3^k$ 的函數值為 $3^{k-1}\times$（$x=3^{k-1}$ 的函數值），

所以（$x=3^{27}$ 的函數值）$=3^{26}\times$（$x=3^{26}$ 的函數值）

$=3^{26}\times3^{25}\times$（$x=3^{25}$ 的函數值）

$=3^{26}\times3^{25}\times3^{24}\times$（$x=3^{24}$ 的函數值）

$=\cdots\cdots$

$=3^{26}\times3^{25}\times3^{24}\times\cdots\cdots\times3^{0}\times$（$x=3^{0}$ 的函數值）

$=3^{26+25+24+\cdots\cdots+0}\times$（$x=1$ 的函數值）

$=3^{26+25+24+\cdots\cdots+0}\times1=3^{351}$

3 合成函數的值（難度★★★★☆）

設函數 $y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$，$x\neq0$，則：

(1)以 y 的式子表示 9^x。

(2)若 $x=k$ 的函數值為 $-\dfrac{5}{4}$，求 k 的值。

(1) $y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$，將分母分子同乘以 3^x 可得

$y=\dfrac{(3^x+3^{-x})\times3^x}{(3^x-3^{-x})\times3^x}=\dfrac{3^{2x}+1}{3^{2x}-1}=\dfrac{9^x+1}{9^x-1}$

$9^x+1=(9^x-1)y$

$9^x+1=9^x\times y-y$

$9^x\times y-9^x=y+1$

$9^x(y-1)=y+1$

$9^x=\dfrac{y+1}{y-1}$

(2)依題意可知，$x=k$ 時，$y=-\dfrac{5}{4}$

將 $x=k$ 代入 $9^x=\dfrac{y+1}{y-1}$，

$9^k=\dfrac{-\frac{5}{4}+1}{-\frac{5}{4}-1}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{-\frac{9}{4}}=\dfrac{1}{9}=9^{-1}$

所以 $k=-1$。

4 求線型函數與三角形面積（難度★★★★★）

在坐標平面上，已知 O 為原點，A、B 兩點坐標分別為（-3 , 0）、（2 , 5），若 C 點在 y 軸上（原點上方），且△AOB 與△COB 的面積相等，求：
(1)通過 B、C 兩點的線型函數。

如圖，△AOB 的面積爲 $\frac{3\times5}{2}=\frac{15}{2}$

設 C 點爲（0 , k），$k>0$，

則 $\frac{k\times2}{2}=\frac{15}{2}$，$k=\frac{15}{2}$，即 C（0 , $\frac{15}{2}$）

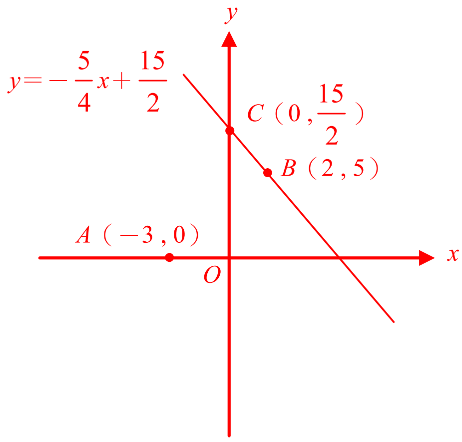
設通過 B、C 兩點的線型函數爲 $y=ax+b$，

代入 B（2 , 5）、C（0 , $\frac{15}{2}$）得

$$\begin{cases} 5=2a+b \cdots\cdots ① \\ \frac{15}{2}=b \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

將②式代入①式得 $5=2a+\frac{15}{2}$，$2a=-\frac{5}{2}$，$a=-\frac{5}{4}$

則此線型函數爲 $y=-\frac{5}{4}x+\frac{15}{2}$

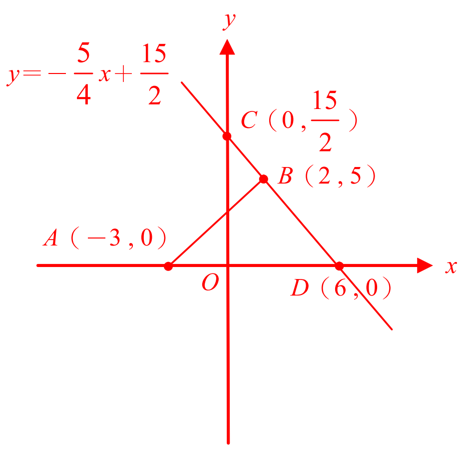


(2)若通過 B、C 兩點的直線與 x 軸交於 D 點，求△ABD 的面積。

設 D 點坐標爲（h , 0），代入 $y=-\frac{5}{4}x+\frac{15}{2}$ 得

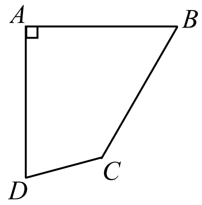
$0=-\frac{5}{4}h+\frac{15}{2}$，$h=6$，即 D（6 , 0）

故△ABD 的面積爲 $\frac{(3+6)\times5}{2}=\frac{45}{2}$



第 3 章　三角形的基本性質

1 角度活用（難度★★★☆☆）



如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} \perp \overline{AD}$，$\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC} = 4$，且 $\angle B = 60°$，則 $\angle BCD$ 的度數為何？

連接 $\overline{AC}$

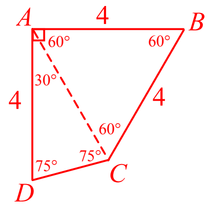
$\because \angle B = 60°$，$\overline{AB} = \overline{BC} = 4$，$\therefore \triangle ABC$ 爲正三角形

故 $\overline{AC} = 4$，$\angle BAC = \angle BCA = 60°$

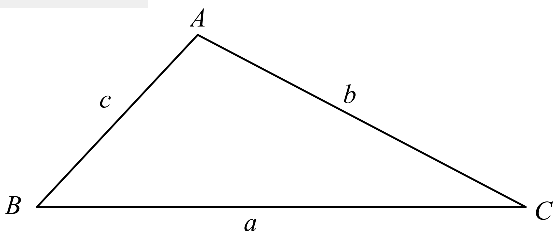
在 $\triangle ADC$ 中，

$\because \angle CAD = 30°$，$\overline{AC} = \overline{AD} = 4$，$\therefore \angle ACD = \dfrac{180°-30°}{2} = 75°$

故 $\angle BCD = 60° + 75° = 135°$



2 三角形特殊角結合畢氏定理（難度★★★★☆）



如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle A \neq 90°$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長分別為 a、b、c，已知 $\angle B = 45°$，則 $\dfrac{(a+b+c)(a-b+c)}{ac}$ 的值為何？

作 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}$，則 $\triangle ABD$ 爲等腰直角三角形，設 $\overline{AD} = \overline{BD} = x$，

由畢氏定理得 $x^2 + x^2 = c^2$，$2x^2 = c^2$，$x = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$，故 $\overline{AD} = \overline{BD} = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$

$\because \overline{BC} = a$，$\therefore \overline{DC} = a - \dfrac{c}{\sqrt{2}}$

在 $\triangle ACD$ 中，$\left(\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(a - \dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 = b^2$

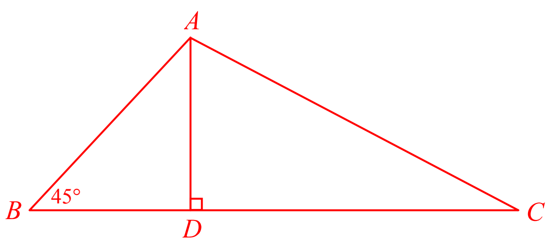
$\dfrac{c^2}{2} + a^2 - \sqrt{2}\,ac + \dfrac{c^2}{2} = b^2$

$a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{2}\,ac$

$a^2 + c^2 + 2ac - b^2 = (2+\sqrt{2})ac$

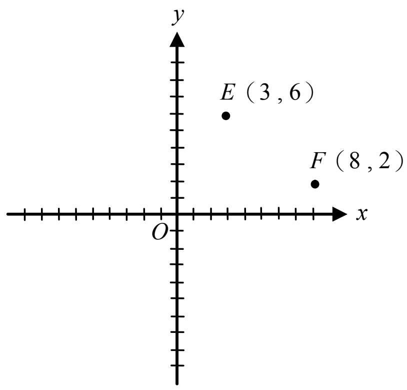
$(a+c)^2 - b^2 = (2+\sqrt{2})ac$

$\therefore \dfrac{(a+c)^2 - b^2}{ac} = 2+\sqrt{2}$，即 $\dfrac{(a+b+c)(a-b+c)}{ac} = 2+\sqrt{2}$



3 三角形的邊角關係（難度★★★★☆）

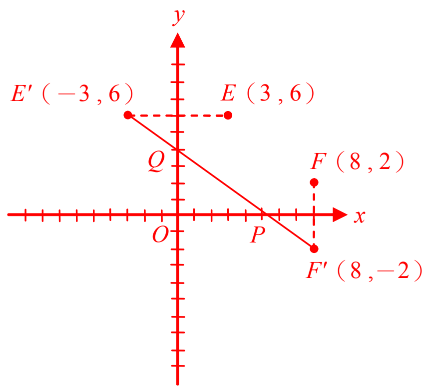
如圖，坐標平面上有兩點 $E(3,6)$、$F(8,2)$，若在 x 軸上找出 P 點、y 軸上找出 Q 點，使得 $\overline{FP}+\overline{PQ}+\overline{EQ}$ 有最小值 k，則：



(1) k 值為何？

如圖，作 $E'(-3,6)$、$F'(8,-2)$，

連接 $\overline{E'F'}$ 交 x 軸於 P 點，交 y 軸於 Q 點，



$\overline{FP}+\overline{PQ}+\overline{EQ}$

$=\overline{F'P}+\overline{PQ}+\overline{E'Q}$（恰爲一直線，距離最小）

$=\overline{E'F'}$

$=\sqrt{[8-(-3)]^2+(-2-6)^2}$

$=\sqrt{11^2+(-8)^2}$

$=\sqrt{121+64}$

$=\sqrt{185}$

$\therefore k=\sqrt{185}$

(2) P、Q 兩點的坐標分別為何？

設 $\overleftrightarrow{E'F'}$：$y=ax+b$，

將 $(-3,6)$、$(8,-2)$ 代入得 $\begin{cases}-3a+b=6 & \cdots\cdots ① \\ 8a+b=-2 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

由①式－②式得 $-11a=8$，$a=-\dfrac{8}{11}$

將 $a=-\dfrac{8}{11}$ 代回①式得 $\dfrac{24}{11}+b=6$，$b=\dfrac{42}{11}$

$\therefore y=-\dfrac{8}{11}x+\dfrac{42}{11}$

令 $x=0$，$y=\dfrac{42}{11}$，則 $Q\left(0,\dfrac{42}{11}\right)$

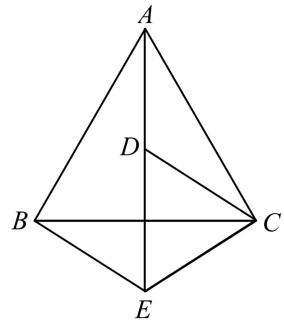
令 $y=0$，$x=\dfrac{21}{4}$，則 $P\left(\dfrac{21}{4},0\right)$

4 三角形全等應用（難度★★★☆☆）

如圖，△ABC、△CDE 為正三角形，A、D、E 三點共線，則：

(1)說明△ADC≅△BEC。

(2)∠BED 的度數為何？



(1)在△ADC 與△BEC 中，

①∵△ABC 爲正三角形，∴ $\overline{AC}=\overline{BC}$

②∵△CDE 爲正三角形，∴ $\overline{CD}=\overline{CE}$

③∵ ∠ACD＝60°－∠BCD，∠BCE＝60°－∠BCD

∴∠ACD＝∠BCE

由①、②、③可知，△ADC≅△BEC（SAS 全等性質）

(2)∵△ADC≅△BEC，

∴∠ADC＝∠BEC＝180°－60°＝120°

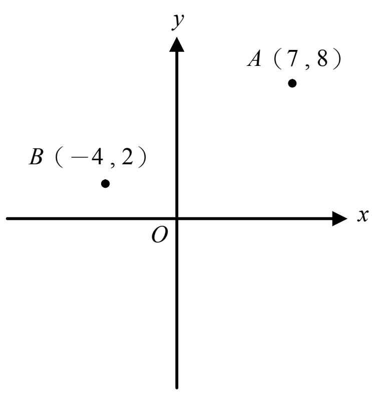
故∠BED＝120°－60°＝60°

5 三角形邊角關係（難度★★★☆☆）

坐標平面上有兩點 $A(7,8)$、$B(-4,2)$，

若 y 軸上有一點 P，使得 $|\overline{PB}-\overline{PA}|$ 有最大值 m，

則 P 點坐標為何？m 值為多少？



如圖，作 $B'(4,2)$

$|\overline{PB}-\overline{PA}|=|\overline{PB'}-\overline{PA}|=\overline{B'A}=\sqrt{(7-4)^2+(8-2)^2}=3\sqrt{5}$

$\therefore m=3\sqrt{5}$

設 $\overleftrightarrow{B'A}$：$y=ax+b$，將 $(4,2)$、$(7,8)$ 代入

得 $\begin{cases}4a+b=2 \cdots\cdots ① \\ 7a+b=8 \cdots\cdots ②\end{cases}$

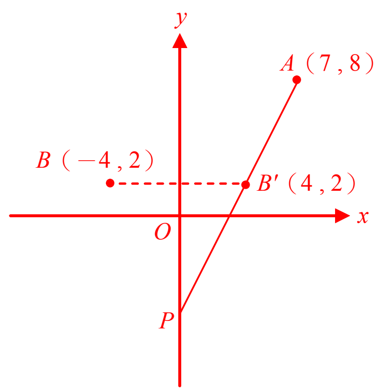
由②式－①式得 $3a=6$，$a=2$，

代回①式得 $8+b=2$，$b=-6$

所以 $\overleftrightarrow{B'A}$：$y=2x-6$

$x=0$ 代入得 $y=-6$，

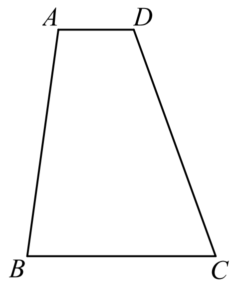
故 $P(0,-6)$。



第 4 章　平行與四邊形

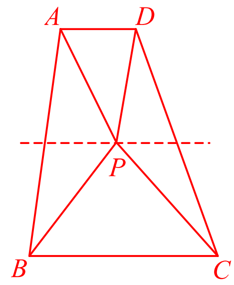
1 梯形（難度★★★★☆）

如圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，$\overline{AD}=4$、$\overline{BC}=10$、高為 12，且 P 點為梯形 $ABCD$ 內部（含四邊）任一點，則：



(1)當 P 點位置在哪裡時，$\triangle APD$ 與 $\triangle BPC$ 的面積和恰為梯形 $ABCD$ 面積的一半？

假設當 P 點落在兩腰中點的連線段上時，可得



$$\triangle APD\text{ 面積}+\triangle BPC\text{ 面積}=\frac{\overline{AD}\times\frac{1}{2}\times 12}{2}+\frac{\overline{BC}\times\frac{1}{2}\times 12}{2}$$

$$=\frac{(\overline{AD}+\overline{BC})\times\frac{1}{2}\times 12}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\text{梯形 }ABCD\text{ 面積}$$

故可知，當 P 點落在兩腰中點的連線段上時，

$\triangle APD$ 與 $\triangle BPC$ 的面積和恰爲梯形 $ABCD$ 面積的一半。

(2)已知 $\triangle APD$ 與 $\triangle BPC$ 的面積和最大值為 a、最小值為 b，則 a、b 的值分別為多少？

當 P 點落在 $\overline{AD}$ 上，面積和爲最大值：

$\triangle APD$ 面積＋$\triangle BPC$ 面積

$=\triangle BPC$ 面積

$=\dfrac{10\times 12}{2}$

$=60$

當 P 點落在 $\overline{BC}$ 上，面積和爲最小值：

$\triangle APD$ 面積＋$\triangle BPC$ 面積

$=\triangle APD$ 面積

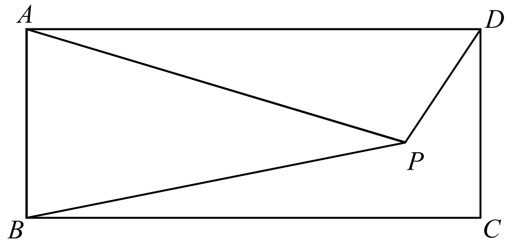
$=\dfrac{4\times 12}{2}$

$=24$

$\therefore a=60$，$b=24$

2 長方形結合畢氏定理（難度★★★☆☆）

如圖，長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=12$，P 為內部一點，若△PAB 面積為長方形 $ABCD$ 面積的 $\dfrac{5}{12}$，△PAD 面積為長方形 $ABCD$ 面積的 $\dfrac{3}{10}$，則 $\overline{PA}$ 長為何？



過 P 點作 $\overline{PF}\perp\overline{AD}$、$\overline{PE}\perp\overline{AB}$，則四邊形 $AEPF$ 爲長方形

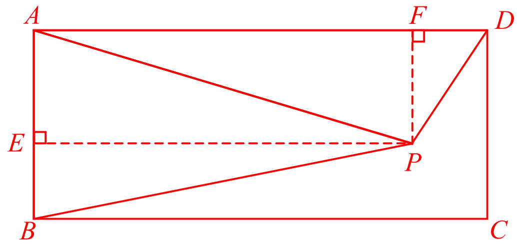
△PAB 面積$=\dfrac{5}{12}\times12\times5=25$

$\dfrac{5\times\overline{PE}}{2}=25$，$\therefore\overline{PE}=10$

△PAD 面積$=\dfrac{3}{10}\times12\times5=18$

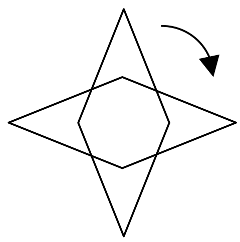
$\dfrac{12\times\overline{PF}}{2}=18$，$\therefore\overline{PF}=3$

$\overline{PA}=\sqrt{10^2+3^2}=\sqrt{109}$



3 菱形複合圖形（難度★★★★★）

如圖，雅瑩將一個兩對角線長分別為 20 和 8 的菱形，使其依中心點順時針旋轉 90°後，得到另一個菱形。則圖形中兩菱形不重疊部分的面積為何？



如圖，菱形是由 8 個△AOC 與 4 個△ABC 所組成。

又△AOC 面積：△ABC 面積$=\overline{OC}:\overline{BC}=8:(20-8)=2:3$

設△AOC 面積$=2k$，△ABC 面積$=3k$，$k>0$

$2k\times8+3k\times4=\dfrac{20\times8}{2}$

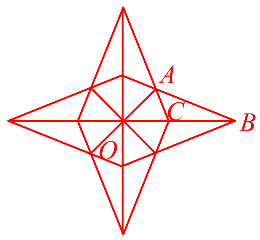
$28k=80$，$k=\dfrac{20}{7}$

故不重疊部分的面積$=8\times$△ABC 面積

$=8\times3k$

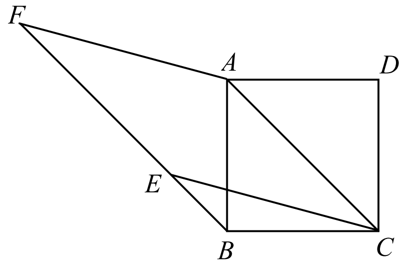
$=8\times\dfrac{60}{7}$

$=\dfrac{480}{7}$



4 菱形結合平行概念（難度★★★★☆）

如圖，正方形 $ABCD$ 中，$\overline{AC}\,//\,\overline{BF}$，$B$、$E$、$F$ 三點共線，已知四邊形 $ACEF$ 為菱形，且 $\overline{AB}=2$，則四邊形 $ACEF$ 的面積為多少？



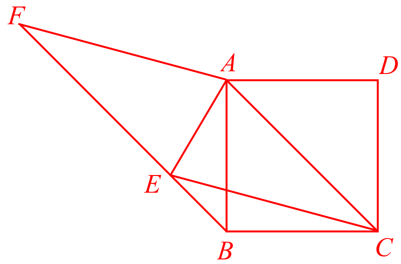
連接 $\overline{AE}$，$\because \overline{BE}\,//\,\overline{AC}$

$\therefore \triangle ABC$ 面積＝$\triangle CAE$ 面積（同底等高）

故$\triangle ABC$ 面積＝$\triangle CAE$ 面積＝$\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

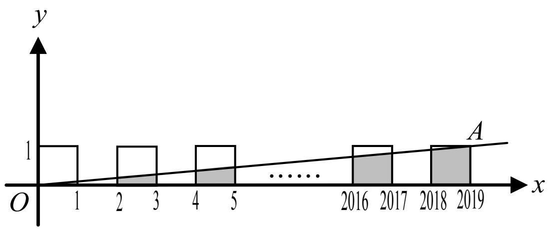
又菱形 $ACEF$ 面積＝$2\times\triangle CAE$ 面積

所以菱形 $ACEF$ 面積＝$2\times 2=4$



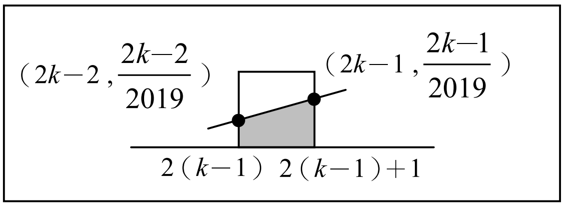
5 梯形面積的應用（難度★★★★☆）

如圖，坐標平面上有 1010 個邊長為 1 的正方形依序排放在 x 軸上，晨宇從第一個正方形左下方的頂點 O（0,0）至第 1010 個正方形右上方的頂點 A（2019,1）連成一線段，則圖形中灰色部分之面積總和為多少？



設通過 O、A 兩點的線型函數爲 $y=ax+b$，

代入 O（0,0）、A（2019,1）得 $\overleftrightarrow{OA}$：$y=\frac{1}{2019}x$



第 k 個正方形產生的灰色面積爲

$(\frac{2k-2}{2019}+\frac{2k-1}{2019})\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{4k-3}{4038}$，$k=1,2,3,\cdots\cdots,1010$

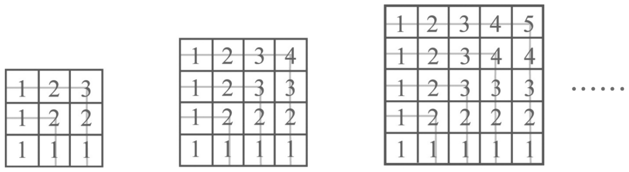
故灰色面積總和＝$\frac{1}{4038}$（$1+5+9+\cdots\cdots+4037$）

$=\frac{1}{4038}\left[\frac{(1+4037)\times 1010}{2}\right]$

$=505$

第 1 章 數列與級數

1.



圖一　　圖二　　圖三

圖一數字總和

$=1+(1+2+1)+(1+2+3+2+1)$

$=1^2+2^2+3^2=14$

圖二數字總和

$=1+(1+2+1)+(1+2+3+2+1)+$

$(1+2+3+4+3+2+1)$

$=1^2+2^2+3^2+4^2=30$

圖三數字總和

$=1+(1+2+1)+(1+2+3+2+1)+$

$(1+2+3+4+3+2+1)+$

$(1+2+3+4+5+4+3+2+1)$

$=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$

$\vdots$

圖八數字總和$=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+10^2=385$

2.

$a_1=-35$，$d=4$

$a_n=a_1+(n-1)d$

又 $a_9=a_1+8d=-3$，$a_{10}=a_1+9d=1$

故可知 a_1、a_2、……、a_9 爲負數，

a_{10}、a_{11}、……、a_{25} 爲正數。

$S'_{25}-S_{25}$

$=|a_1|+\cdots\cdots+|a_9|+|\cancel{a_{10}}|+\cancel{\cdots\cdots}+$

$|\cancel{a_{25}}|-a_1-\cdots\cdots-a_9-\cancel{a_{10}}-\cancel{\cdots\cdots}-\cancel{a_{25}}$

$=2\times(|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_9|)$

$=2\times|a_1+a_2+\cdots\cdots+a_9|$

$=2\times\left|\dfrac{9[-35+(-3)]}{2}\right|$

$=9\times38$

$=342$

3.

(1)

設被加了兩次的頁碼數字爲 k，且 $k<n$

得到的總和$=\dfrac{(1+n)\times n}{2}<52863$

$n\times(1+n)<105726$

當 $n=325$，$325\times326=105950$（不合）

當 $n=324$，$324\times325=105300$（合）

當 $n=323$，$323\times324=104652$（合）

當 $n=324$ 時，$k=52863-\dfrac{105300}{2}=213$

當 $n=323$ 時，

$k=52863-\dfrac{104652}{2}=537$（不合）

故被加了兩次的頁碼數字爲 213。

(2)

由(1)可知共有 324 頁。

1 個數字：1～9，共有 $1\times9=9$（個）

2 個數字：10～99，共有 $2\times90=180$（個）

3 個數字：100～324，共有 $3\times225=675$（個）

∴一共有 $9+180+675=864$ 個數字。

4.

因爲 a、b 的等差中項爲 16，

所以$\dfrac{a+b}{2}=16$，$a+b=32$

因爲 a、b 的等比中項爲 $4\sqrt{5}$，

所以 $a\times b=(4\sqrt{5})^2$，$ab=80$

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{b^2}{ab}+\dfrac{a^2}{ab}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$

又 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

故$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}$

$=\dfrac{32^2-2\times80}{80}$

$=\dfrac{864}{80}=\dfrac{54}{5}$

5.

等比數列 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , …… 依序排列，

可得第 n 個數 $a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$。

如圖，第 1 層至第 19 層共有

$\dfrac{(1+19)\times19}{2}=\dfrac{20\times19}{2}=190$（個），

即第 20 層由左至右算起的第 10 個數，

是從第 1 層算起的第 $190+10=200$ 個數。

第 200 個數 $a_{200}=2^{200-1}=2^{199}$，

故 $x=199$。

第 2 章 線型函數與其圖形

1.

(1)

$\dfrac{(x=54321的函數值)-(x=12345的函數值)}{54321-12345}$

$=\dfrac{(\frac{2022}{2023}\times54321+\frac{2023}{2024})-(\frac{2022}{2023}\times12345+\frac{2023}{2024})}{54321-12345}$

$=\dfrac{\frac{2022}{2023}\times(54321-12345)}{54321-12345}$

$=\dfrac{2022}{2023}$

(2)

$a=\dfrac{2022}{2023}\times2020+\dfrac{2023}{2024}$，

$b=\dfrac{2022}{2023}\times(-2026)+\dfrac{2023}{2024}$，

所以 $a-b=\left[\dfrac{2022}{2023}\times2020+\dfrac{2023}{2024}\right]-\left[\dfrac{2022}{2023}\times(-2026)+\dfrac{2023}{2024}\right]$

$=\dfrac{2022}{2023}\times(2020+2026)$

$=\dfrac{2022}{2023}\times4046$

$=4044$。

2.

(1)

$n=1$ 時，$x=3$，

其函數值為 $1\times$（$x=1$ 的函數值），

即 $1\times1=1$

$n=3$ 時，$x=3\times3=9$，

其函數值為 $3\times$（$x=3$ 的函數值），

即 $3\times1=3$

$n=9$ 時，$x=3\times9=27$，

其函數值為 $9\times$（$x=9$ 的函數值），

即 $9\times3=27$

$n=27$ 時，$x=3\times27=81$，

其函數值為 $27\times$（$x=27$ 的函數值），

即 $27\times27=729$

(2)

觀察上列關係式得到 $x=3^k$ 的函數值為

$3^{k-1}\times$（$x=3^{k-1}$ 的函數值），

所以（$x=3^{27}$ 的函數值）

$=3^{26}\times$（$x=3^{26}$ 的函數值）

$=3^{26}\times3^{25}\times$（$x=3^{25}$ 的函數值）

$=3^{26}\times3^{25}\times3^{24}\times$（$x=3^{24}$ 的函數值）

$=\cdots\cdots$

$=3^{26}\times3^{25}\times3^{24}\times\cdots\cdots\times3^{0}\times$（$x=3^{0}$ 的函數值）

$=3^{26+25+24+\cdots\cdots+0}\times$（$x=1$ 的函數值）

$=3^{26+25+24+\cdots\cdots+0}\times1=3^{351}$

3.

(1)

$y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$，將分母分子同乘以 3^x 可得

$y=\dfrac{(3^x+3^{-x})\times3^x}{(3^x-3^{-x})\times3^x}=\dfrac{3^{2x}+1}{3^{2x}-1}=\dfrac{9^x+1}{9^x-1}$

$9^x+1=(9^x-1)y$

$9^x+1=9^x\times y-y$

$9^x\times y-9^x=y+1$

$9^x(y-1)=y+1$

$9^x=\dfrac{y+1}{y-1}$

(2)

依題意可知，$x=k$ 時，$y=-\frac{5}{4}$

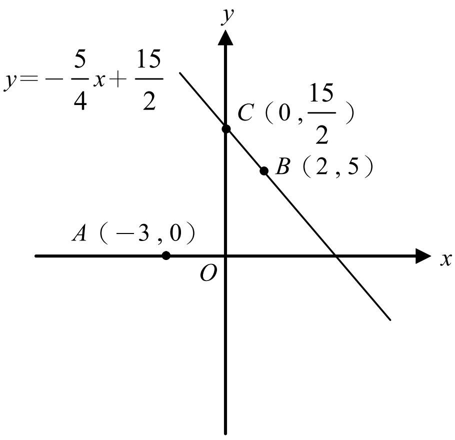
將 $x=k$ 代入 $9^x=\frac{y+1}{y-1}$，

$$9^k=\frac{-\frac{5}{4}+1}{-\frac{5}{4}-1}=\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{9}{4}}=\frac{1}{9}=9^{-1}$$

所以 $k=-1$。

4.

(1)



如圖，$\triangle AOB$ 的面積爲 $\frac{3\times 5}{2}=\frac{15}{2}$

設 C 點爲 $(0,k)$，$k>0$，

則 $\frac{k\times 2}{2}=\frac{15}{2}$，$k=\frac{15}{2}$，即 $C(0,\frac{15}{2})$

設通過 B、C 兩點的線型函數爲 $y=ax+b$，

代入 $B(2,5)$、$C(0,\frac{15}{2})$ 得

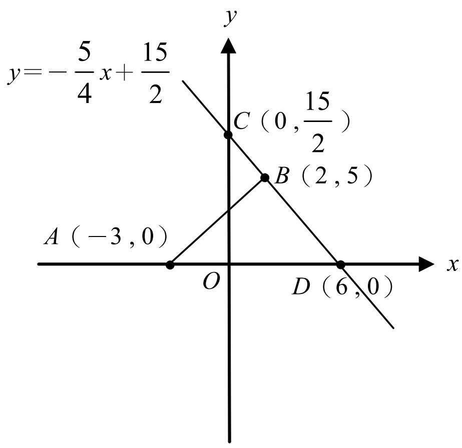
$$\begin{cases} 5=2a+b \cdots\cdots ① \\ \frac{15}{2}=b \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

將②式代入①式得 $5=2a+\frac{15}{2}$，

$2a=-\frac{5}{2}$，$a=-\frac{5}{4}$

則此線型函數爲 $y=-\frac{5}{4}x+\frac{15}{2}$

(2)



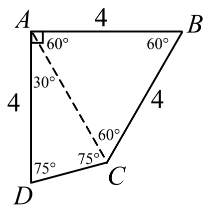
設 D 點坐標爲 $(h,0)$，代入 $y=-\frac{5}{4}x+\frac{15}{2}$ 得

$0=-\frac{5}{4}h+\frac{15}{2}$，$h=6$，即 $D(6,0)$

故 $\triangle ABD$ 的面積爲 $\frac{(3+6)\times 5}{2}=\frac{45}{2}$

第 3 章 三角形的基本性質

1.



連接 $\overline{AC}$

$\because \angle B=60°$，$\overline{AB}=\overline{BC}=4$

$\therefore \triangle ABC$ 爲正三角形

故 $\overline{AC}=4$，$\angle BAC=\angle BCA=60°$

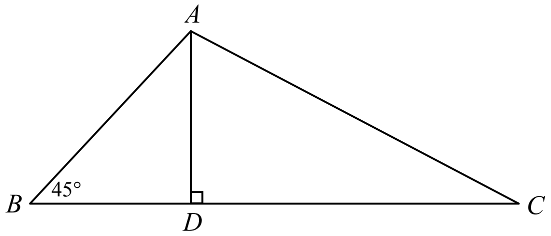
在 $\triangle ADC$ 中，

$\because \angle CAD=30°$，$\overline{AC}=\overline{AD}=4$

$\therefore \angle ACD=\frac{180°-30°}{2}=75°$

故 $\angle BCD=60°+75°=135°$

2.



作 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}$，

則△ABD 爲等腰直角三角形

設 $\overline{AD}=\overline{BD}=x$，由畢氏定理得

$x^2+x^2=c^2$，$2x^2=c^2$，$x=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$，

故 $\overline{AD}=\overline{BD}=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$

$\because \overline{BC}=a$，$\therefore \overline{DC}=a-\dfrac{c}{\sqrt{2}}$

在△ACD 中，$\left(\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(a-\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)^2=b^2$

$\dfrac{c^2}{2}+a^2-\sqrt{2}\,ac+\dfrac{c^2}{2}=b^2$

$a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}\,ac$

$a^2+c^2+2ac-b^2=(2+\sqrt{2})ac$

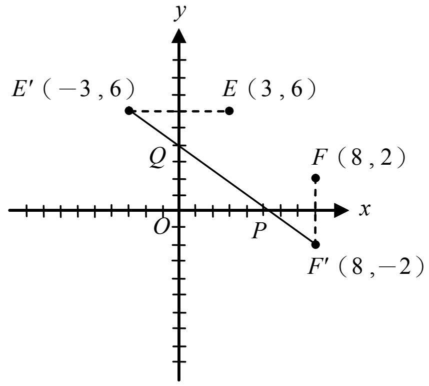
$(a+c)^2-b^2=(2+\sqrt{2})ac$

$\therefore \dfrac{(a+c)^2-b^2}{ac}=2+\sqrt{2}$，

即 $\dfrac{(a+b+c)(a-b+c)}{ac}=2+\sqrt{2}$

3.

(1)



如圖，作 $E'(-3,6)$、$F'(8,-2)$，

連接 $\overline{E'F'}$ 交 x 軸於 P 點，交 y 軸於 Q 點，

$\overline{FP}+\overline{PQ}+\overline{EQ}$

$=\overline{F'P}+\overline{PQ}+\overline{E'Q}$（恰爲一直線，距離最小）

$=\overline{E'F'}$

$=\sqrt{[8-(-3)]^2+(-2-6)^2}$

$=\sqrt{11^2+(-8)^2}$

$=\sqrt{121+64}$

$=\sqrt{185}$

$\therefore k=\sqrt{185}$

(2)

設 $\overleftrightarrow{E'F'}$：$y=ax+b$，

將 $(-3,6)$、$(8,-2)$ 代入得

$\begin{cases}-3a+b=6 \cdots\cdots ① \\ 8a+b=-2 \cdots\cdots ②\end{cases}$

由①式－②式得 $-11a=8$，$a=-\dfrac{8}{11}$

將 $a=-\dfrac{8}{11}$ 代回①式得 $\dfrac{24}{11}+b=6$，$b=\dfrac{42}{11}$

$\therefore y=-\dfrac{8}{11}x+\dfrac{42}{11}$

令 $x=0$，$y=\dfrac{42}{11}$，則 $Q\left(0,\dfrac{42}{11}\right)$

令 $y=0$，$x=\dfrac{21}{4}$，則 $P\left(\dfrac{21}{4},0\right)$

4.

(1)在$\triangle ADC$與$\triangle BEC$中，

①$\because \triangle ABC$爲正三角形，$\therefore \overline{AC}=\overline{BC}$

②$\because \triangle CDE$爲正三角形，$\therefore \overline{CD}=\overline{CE}$

③$\because \angle ACD=60^\circ-\angle BCD$，

$\angle BCE=60^\circ-\angle BCD$

$\therefore \angle ACD=\angle BCE$

由①、②、③可知，

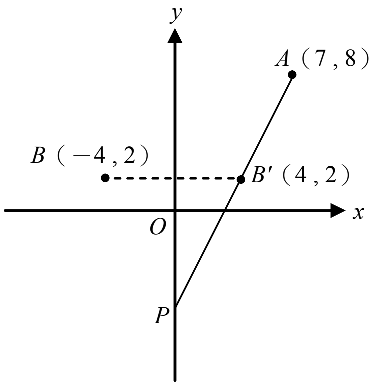
$\triangle ADC\cong\triangle BEC$（$SAS$ 全等性質）

(2)$\because \triangle ADC\cong\triangle BEC$，

$\therefore \angle ADC=\angle BEC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

故$\angle BED=120^\circ-60^\circ=60^\circ$

5.



如圖，作 B'（4，2）

$|\overline{PB}-\overline{PA}|=|\overline{PB'}-\overline{PA}|$

$=\overline{B'A}$

$=\sqrt{(7-4)^2+(8-2)^2}$

$=3\sqrt{5}$

$\therefore m=3\sqrt{5}$

設$\overleftrightarrow{B'A}$：$y=ax+b$，將（4，2）、（7，8）

代入得$\begin{cases}4a+b=2 & \cdots\cdots ① \\ 7a+b=8 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

由②式−①式得 $3a=6$，$a=2$，

代回①式得 $8+b=2$，$b=-6$

所以$\overleftrightarrow{B'A}$：$y=2x-6$

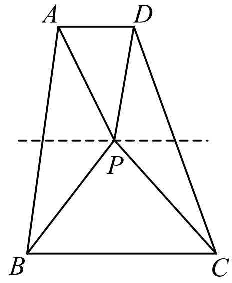
$x=0$ 代入得 $y=-6$，

故 P（0，−6）。

第 4 章　平行與四邊形

1.

(1)



假設當 P 點落在兩腰中點的連線段上時，可得

$\triangle APD$ 面積＋$\triangle BPC$ 面積

$=\dfrac{\overline{AD}\times\frac{1}{2}\times 12}{2}+\dfrac{\overline{BC}\times\frac{1}{2}\times 12}{2}$

$=\dfrac{(\overline{AD}+\overline{BC})\times\frac{1}{2}\times 12}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\times$梯形 $ABCD$ 面積

故可知，當 P 點落在兩腰中點的連線段上時，

$\triangle APD$ 與$\triangle BPC$ 的面積和恰爲梯形 $ABCD$

面積的一半。

(2)

當 P 點落在$\overline{AD}$上，面積和爲最大值：

$\triangle APD$ 面積＋$\triangle BPC$ 面積

$=\triangle BPC$ 面積

$=\dfrac{10\times 12}{2}$

$=60$

當 P 點落在$\overline{BC}$上，面積和爲最小值：

$\triangle APD$ 面積＋$\triangle BPC$ 面積

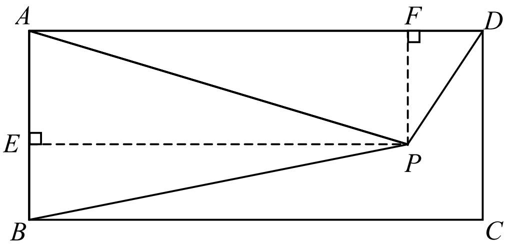
$=\triangle APD$ 面積

$=\dfrac{4\times 12}{2}$

$=24$

$\therefore a=60$，$b=24$

2.



過 P 作 $\overline{PF}\perp\overline{AD}$ 、 $\overline{PE}\perp\overline{AB}$ ，
則四邊形 $AEPF$ 為長方形

$\triangle PAB$ 面積 $=\frac{5}{12}\times12\times5=25$

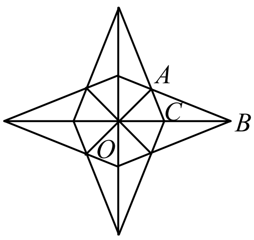
$\frac{5\times\overline{PE}}{2}=25$，$\therefore\overline{PE}=10$

$\triangle PAD$ 面積 $=\frac{3}{10}\times12\times5=18$

$\frac{12\times\overline{PF}}{2}=18$，$\therefore\overline{PF}=3$

$\overline{PA}=\sqrt{10^2+3^2}=\sqrt{109}$

3.



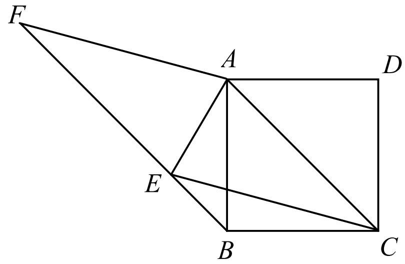
如圖，
菱形是由 8 個$\triangle AOC$ 與 4 個$\triangle ABC$ 所組成。
又$\triangle AOC$ 面積：$\triangle ABC$ 面積
$=\overline{OC}:\overline{BC}$
$=8:(20-8)=2:3$
設$\triangle AOC$ 面積 $=2k$，$\triangle ABC$ 面積 $=3k$，$k>0$

$2k\times8+3k\times4=\frac{20\times8}{2}$

$28k=80$，$k=\frac{20}{7}$

故不重疊部分的面積
$=8\times\triangle ABC$ 面積
$=8\times3k$
$=8\times\frac{60}{7}$
$=\frac{480}{7}$

4.



連接 $\overline{AE}$
$\because\overline{BE}\,/\!/\,\overline{AC}$
$\therefore\triangle ABC$ 面積 $=\triangle CAE$ 面積（同底等高）
故$\triangle ABC$ 面積 $=\triangle CAE$ 面積

$=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

又菱形 $ACEF$ 面積 $=2\times\triangle CAE$ 面積
所以菱形 $ACEF$ 面積 $=2\times2=4$

5.
設通過 O、A 兩點的線型函數為 $y=ax+b$，

代入 $O(0,0)$、$A(2019,1)$ 得 $\overleftrightarrow{OA}$：$y=\frac{1}{2019}x$

第 k 個正方形產生的灰色面積為

$(\frac{2k-2}{2019}+\frac{2k-1}{2019})\times1\times\frac{1}{2}$

$=\frac{4k-3}{4038}$，$k=1,2,3,\cdots\cdots,1010$

故灰色面積總和

$=\frac{1}{4038}(1+5+9+\cdots\cdots+4037)$

$=\frac{1}{4038}[\frac{(1+4037)\times1010}{2}]$

$=505$