

國中數學 3 上 課習一本通

目次

第 1 章 相似形與三角比	
1-1 連比.....	2
1-2 比例線段.....	6
1-3 相似多邊形.....	10
1-4 相似三角形的應用與三角比.....	14
第 2 章 圓形	
2-1 點、線、圓.....	18
2-2 圓心角與圓周角.....	24
第 3 章 推理證明與三角形的心	
3-1 推理證明.....	28
3-2 三角形的心.....	32
解答篇.....	36

★ 課本重點整理

<p>1. 連比</p> <p>a 比 b 比 c 記作 $a:b:c$， 稱為 a、b、c 的連比。</p> 	<p>2. 連比例的運算性質</p> <p>若 a、b、c 三數的比記為 $a:b:c$， 且 $m \neq 0$，則</p> <p>(1) $a:b:c = ma:mb:mc$</p> <p>(2) $a:b:c = \frac{a}{m} : \frac{b}{m} : \frac{c}{m}$</p> 
<p>3. 求連比</p> <p>由 $x:y$、$y:z$、$x:z$ 中的任意兩個比， 可求出 $x:y:z$。</p> 	<p>4. 連比例式的應用</p> <p>已知 a、b、c 皆不等於 0，則下列 三者有相同的意義。</p> <p>(1) $x:y:z = a:b:c$</p> <p>(2) $\frac{x}{a} : \frac{y}{b} : \frac{z}{c}$</p> <p>(3) $x=ar$，$y=br$，$z=cr$ ($r \neq 0$)</p> 

★ 小試身手

已知 a 、 b 、 c 皆不等於 0，下列敘述正確打○，不正確打×：

- (1) (○) 若 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ ，則 $a:c=2:5$ 。
- (2) (×) 若 $2a=3b=5c$ ，則 $a:c=2:5$ 。
- (3) (×) 若 $3a=4b$ ， $6a=10c$ ，則 $b:c=4:5$ 。
- (4) (×) 若 $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ ，則 $a:b=4:3$ 。
- (5) (○) 若 $\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8}$ ，則 $a:b:c=2:3:4$ 。

★ 課習演練

1. 求下列各題的連比：

(1) $x : y = 2 : 3$ ， $y : z = 4 : 5$ ，則 $x : y : z = \underline{8 : 12 : 15}$ 。

(2) $y : z = \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ ， $x : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$ ，則 $x : y : z = \underline{18 : 10 : 15}$ 。

課本 P21 自評 1



2. 已知 a 、 b 、 c 皆不等於 0，且 $2a = 3b$ ， $4b = 5c$ ，求 $a : b : c$ 。

$15 : 10 : 8$

課本 P21 自評 2



3. 已知 $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{3}$ ，且 $x + 3y - 4z = 33$ ，求 z 的值。

9

課本 P22 自評 4



4. 園遊會時，小芸負責調配綜合果汁來販賣，她的獨家配方如下：一杯綜合果汁是用 240 毫升的柳橙汁、160 毫升的蘋果汁和 240 毫升的芭樂汁混合調配而成的，如果小芸想依此比例調配出 24 公升的綜合果汁，她需要柳橙汁、蘋果汁與芭樂汁各多少公升？（1 公升 = 1000 毫升）

柳橙汁 9 公升，蘋果汁 6 公升，芭樂汁 9 公升

習作 P5 基礎 4



5. 已知 $\triangle ABC$ 三個內角分別為 $\angle A = x^\circ$ ， $\angle B = y^\circ$ ， $\angle C = z^\circ$ ，且 $x : 2y = 9 : 10$ ， $4y : 5z = 1 : 1$ ，回答下列問題：

(1) 求 $x : y : z$ 。

$9 : 5 : 4$

(2) 求 $\angle A$ 的度數。

90°

課本 P22 自評 5



★課本類題

1. 已知 $x:y = \frac{5}{2} : 3$ ， $y:z = 4:5$ ，求 $x:y:z$ 。

10 : 12 : 15

2. 已知 x 、 y 、 z 皆不等於 0，且 $x=4y$ ， $3x=2z$ ，求 $x:y:z$ 。

4 : 1 : 6

3. 若 $x:y:z = 2:3:4$ ，且 $x+2y-z=36$ ，求 x 、 y 、 z 的值。

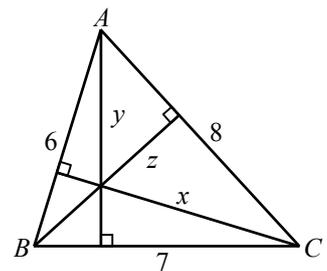
$x=18$ ， $y=27$ ， $z=36$

4. 已知區公所提供 A 、 B 、 C 三款疫苗開放民眾施打，若該區公所共有 2100 個疫苗，且 A 、 B 、 C 三款疫苗的數量比為 $4:8:9$ ，則區公所提供 B 疫苗的數量為多少個？

800 個

5. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 7$ ， $\overline{AC} = 8$ ，若此三角形三邊的對應高依序分別為 x 、 y 、 z ，求 $x:y:z$ 。

28 : 24 : 21



★ 習作類題

1. 求下列各題的連比：

(1) 已知 $x : z = 7 : 12$ ， $y : z = 11 : 6$ ，求 $x : y : z$ 。

(2) 已知 $x : y = \frac{8}{5} : 3$ ， $x : z = 3 : 7$ ，求 $x : y : z$ 。

(1) $7 : 22 : 12$

(2) $24 : 45 : 56$

2. 已知 a 、 b 、 c 皆不等於 0，且 $a : b = \frac{1}{4} : \frac{1}{3}$ ， $2b = 7c$ ，求 $a : b : c$ 。

$21 : 28 : 8$

3. 若 $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ ，且 $3x - y + z = 84$ ，求 x 、 y 、 z 的值。

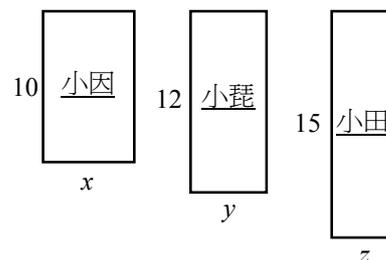
$x = 24$ ， $y = 48$ ， $z = 60$

4. 有一個三角形，其周長是 126 公分，且三邊長分別為 x 公分、 y 公分、 z 公分，若 $3x : 4y = 9 : 8$ ， $2x : 5z = 3 : 10$ ，求 x 、 y 、 z 的值。

$x = 42$ ， $y = 28$ ， $z = 56$

5. 如圖，小音、小蕘、小田三人想利用剪紙剪出面積相等的長方形，已知三人分別以 10 公分、12 公分與 15 公分作為長方形的長，且長方形的寬依序分別為 x 公分， y 公分與 z 公分，求 $x : y : z$ 。

$6 : 5 : 4$



★ 課本重點整理

1. 等高或同高三角形的面積比

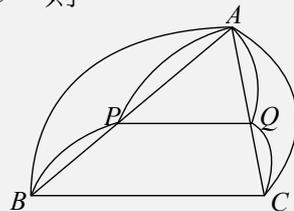
等（同）高三角形的面積比等於其對應底邊長的比。



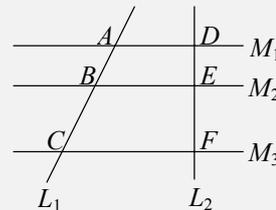
2. 平行線截比例線段性質與應用

(1) 如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上的一點，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，則：

- ① $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ 。
- ② $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。
- ③ $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ 。
- ④ $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。



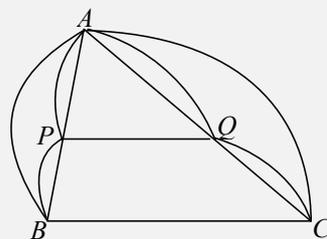
(2) 如圖，直線 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3$ ，且分別與截線 L_1 交於 A 、 B 、 C 三點，與截線 L_2 交於 D 、 E 、 F 三點，則 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。



3. 截線段與平行的判別

$\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上，

- (1) 若 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。
- (2) 若 $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。
- (3) 若 $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。



4. 三角形兩邊中點連線段性質

三角形的兩邊中點連線段必平行於第三邊，且長度為第三邊長的一半。



★ 小試身手

在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上，下列敘述正確打○，不正確打×：

- (1) (○) 若 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$ ，則 \overline{DE} 一定與 \overline{BC} 平行。
- (2) (×) 若 $\overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB}$ ，則 \overline{DE} 一定與 \overline{BC} 平行。
- (3) (○) 若 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ ，則 \overline{DE} 一定與 \overline{BC} 平行。

★ 課習演練

1. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 在 \overline{BC} 上， E 在 \overline{AD} 上，且 $\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2$ ，

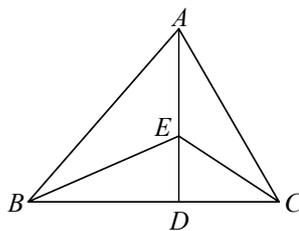
$\overline{AE} : \overline{ED} = 5 : 3$ ，若 $\triangle BDE$ 的面積是 9，求：

(1) $\triangle CDE$ 的面積。

6

(2) $\triangle CAE$ 的面積。

10



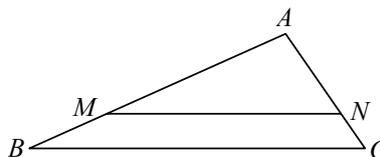
習作 P9 基礎 1



2. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AM} = 2x + 4$ ， $\overline{MB} = x + 1$ ， $\overline{AN} = 7$ ，

$\overline{NC} = 3$ ，求 x 的值。

5



課本 P41 自評 2

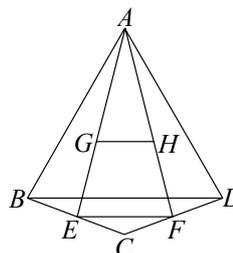


3. 如圖， E 、 F 分別是 \overline{BC} 、 \overline{CD} 的中點，連接 \overline{AE} 、 \overline{AF} 。若 G 、 H 分別在 \overline{AE} 、 \overline{AF} 上，且 $\overline{AG} : \overline{GE} = 3 : 2$ ， $\overline{AH} : \overline{HF} = 3 : 2$ ，回答下列問題：

(1) \overline{GH} 和 \overline{EF} 是否平行？答：是。

(2) $\overline{GH} : \overline{EF} = \underline{3} : \underline{5}$ 。

(3) $\overline{GH} : \overline{BD} = \underline{3} : \underline{10}$ 。



課本 P41 自評 3

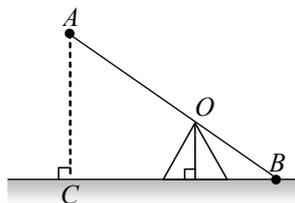


4. 如圖， \overline{AB} 是一個不等臂的蹺蹺板， O 為支點， O 離地面 30 公分，

已知 $\overline{OA} : \overline{OB} = 3 : 2$ ， $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ ，則當 B 點接觸地面時，

A 點離地面的距離為何？

75 公分

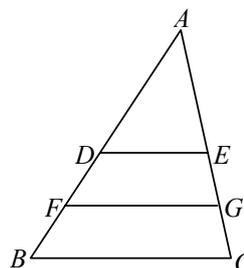


習作 P9 基礎 3



5. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點， F 、 G 分別為 \overline{BD} 、 \overline{CE} 的中點，若 $\overline{BC} = 24$ ，求 \overline{FG} 。

18



習作 P10 基礎 6



★課本類題

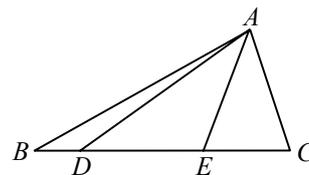
1. 如圖， $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BD} : \overline{DE} : \overline{EC} = 2 : 6 : 4$ ，求：

(1) $\triangle ABD : \triangle ADC$ 的面積。

(2) $\triangle ADC : \triangle ABC$ 的面積。

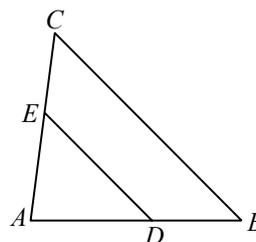
(1) 1 : 5

(2) 5 : 6



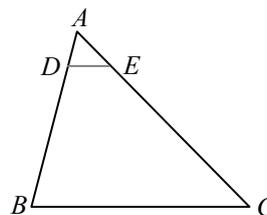
2. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD} = 8$ ， $\overline{DB} = 6$ ， $\overline{DE} = 2x$ ， $\overline{BC} = 3x + 4$ ，求 x 的值。

8



3. 如圖， $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AD} : \overline{AB} = 3 : 13$ ， $\overline{AE} = 12$ ， $\overline{AC} = 52$ ，則 \overline{DE} 與 \overline{BC} 是否平行？為什麼？

是，因為 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC} = 3 : 13$ 。



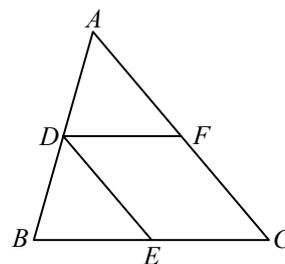
4. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 的中點，若 $\overline{AC} = 21$ ， $\overline{BC} = 18$ ，回答下列問題：

(1) 四邊形 $DECF$ 是否為平行四邊形？

(2) 四邊形 $DECF$ 的周長為多少？

(1) 是

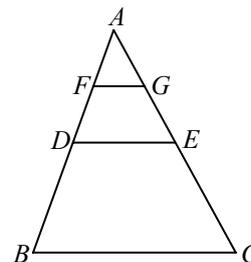
(2) 39



5. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點，

F 、 G 分別為 \overline{AD} 、 \overline{AE} 的中點，若 $\overline{FG} = 3.5$ ，求 $\overline{DE} + \overline{BC}$ 。

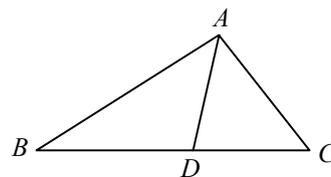
21



★ 習作類題

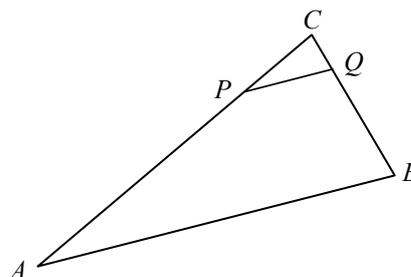
1. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{BD} = 25$ ， $\overline{CD} = 18$ ，
若 $\triangle ADC$ 的面積為 108，則 $\triangle ABD$ 的面積為多少？

150



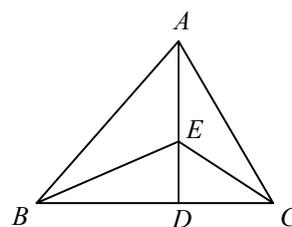
2. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{CP} = 9$ ， $\overline{PA} = 4x - 7$ ，
 $\overline{CQ} = 4$ ， $\overline{QB} = x + 7$ ，求 x 的值。

13



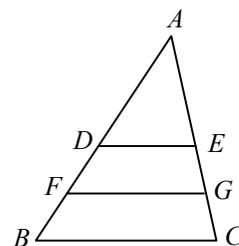
3. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 在 \overline{BC} 上， E 在 \overline{AD} 上，且 $\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2$ ，
 $\overline{AE} : \overline{ED} = 5 : 3$ ，若 $\triangle BDE$ 的面積是 15，則 $\triangle CAE$ 的面積為多少？

$\frac{50}{3}$



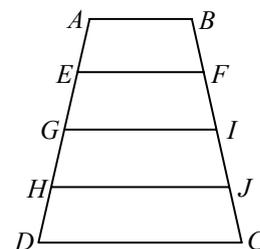
4. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點， F 、 G 分別為
 \overline{BD} 、 \overline{CE} 的中點，若 $\overline{BC} = 28$ ，求 \overline{FG} 。

21



5. 小櫻利用一些積木堆成一個四層的火山，每一層的高度皆相等，側面是等腰梯形 $ABCD$ ，
 \overline{AB} 、 \overline{CD} 分別為上底、下底，且 E 、 G 、 H 三點將 \overline{AD} 四等分， F 、 I 、 J 三點將 \overline{BC} 四等分，
若 $\overline{AB} = 8$ 公分， $\overline{CD} = 16$ 公分，則 \overline{EF} 為多少公分？

10 公分



★ 課本重點整理

1. 縮放的性質

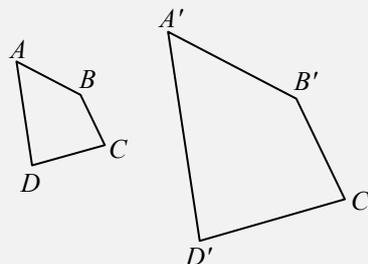


- (1) 線段縮放 k 倍後，縮放後的線段長為原線段長的 k 倍。
- (2) 任意一個多邊形經過縮放 r 倍後的新多邊形，其對應角的角度不變，對應的邊長變成原來的 r 倍。

2. 相似多邊形



- (1) 如果兩個多邊形的對應角相等、對應邊成比例，就稱這兩個多邊形相似。
- (2) 若兩個多邊形相似，則其對應角相等，對應邊成比例。



3. 三角形的相似性質



AA 相似性質	SAS 相似性質	SSS 相似性質
$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$	$\angle A = \angle D, \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$

★ 小試身手

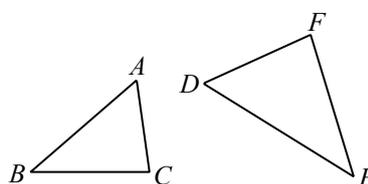
下列敘述正確打○，不正確打×：

1. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 且 $A、B、C$ 的對應點分別是 $D、E、F$ ，且 $\overline{BC} : \overline{EF} = 2 : 3$ 。

- (1) (○) $\overline{AB} : \overline{DE} = 2 : 3$ 。
- (2) (×) $\triangle ABC$ 面積 : $\triangle DEF$ 面積 = 2 : 3。

2. 如右圖，已知 $\angle B = \angle E$ ，且 $\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{BC} : \overline{EF}$ 。

- (1) (×) 利用 SSS 相似性質，可得 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。
- (2) (○) $\angle C = \angle F$ 。



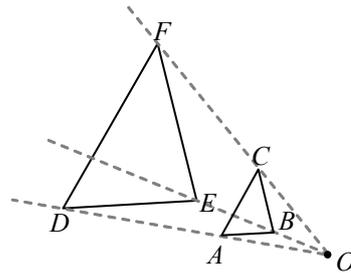
★ 課習演練

1. 如圖， $\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 的縮放圖，已知 $\overline{AC} = 14$ ， $\overline{BC} = x + 5$ ， $\overline{DF} = 35$ ， $\overline{EF} = 4x + 2$ ，求 \overline{BC} 。

習作 P13 基礎 1



12



2. 已知四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ 中， A 、 B 、 C 、 D 對應頂點為 A' 、 B' 、 C' 、 D' ，回答下列問題：

課本 P62 自評 3



(1) 若 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \overline{DA} = 1 : 3 : 4 : 2$ ，四邊形 $A'B'C'D'$ 周長為 50，求 $\overline{A'B'}$ 、 $\overline{C'D'}$ 。

(2) 若 $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 5 : 3$ ， $\angle D = 100^\circ$ ，求 $\angle A'$ 及 $\angle B'$ 。

(1) $\overline{A'B'} = 5$ ， $\overline{C'D'} = 20$

(2) $\angle A' = 52^\circ$ ， $\angle B' = 130^\circ$

3. 如圖， L_1 、 L_2 、 L_3 皆為直線， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，直線 M 、 N 交於 A 點， $\overline{GE} = 2$ ， $\overline{EA} = 3$ ， $\overline{AC} = 4$ ， $\overline{HA} = 4$ ，回答下列問題：

課本 P63 自評 6

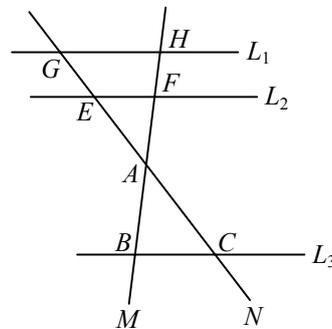


(1) \overline{FA} 。

(2) 若 $\overline{EF} = 2.1$ ，求 \overline{BC} 。

(1) 2.4

(2) 2.8



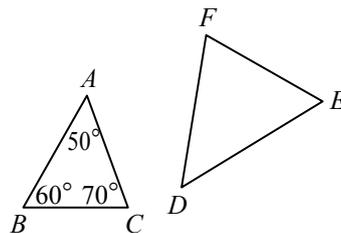
4. 如圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中， $\angle A = 50^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 70^\circ$ ，且 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ ，

習作 P14 基礎 5



已知 $\angle D = (x + 2y)^\circ$ ， $\angle E = (x + 3y)^\circ$ ，求 x 、 y 的值。

$x = 30$ ， $y = 10$



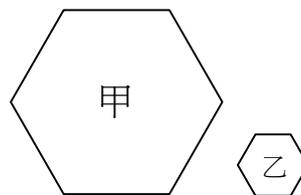
★課本類題

1. 有一邊長為 16 公分的正八邊形，將它縮放 $\frac{1}{8}$ 倍後所得的縮放圖形，其邊長與每一個內角度數分別是多少？

2 公分， 135°

2. 如圖，甲、乙都是正六邊形，回答下列問題。

- (1) 甲、乙的對應角是否相等？
 (2) 甲、乙的對應邊是否成比例？
 (3) 甲、乙是否相似？



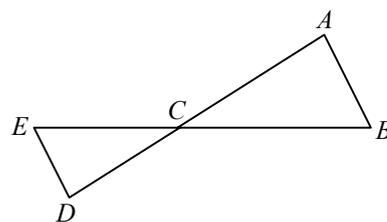
- (1) 是
 (2) 是
 (3) 是

3. 已知五邊形 $ABCDE \sim$ 五邊形 $PQRST$ ， A 、 B 、 C 、 D 、 E 的對應頂點依序為 P 、 Q 、 R 、 S 、 T ，若 $\overline{BC} = 28$ ， $\overline{CD} = 5x + 6$ ， $\overline{QR} = 7$ ， $\overline{RS} = x + 3$ ，求 x 的值。

6

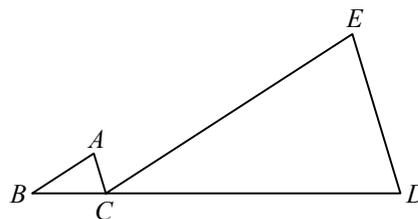
4. 如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， \overline{AD} 與 \overline{BE} 交於 C 點，若 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{DE} = 4$ ，求 \overline{EC} 。

$\frac{20}{3}$



5. 如圖， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 中， B 、 C 、 D 三點共線， $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$ ，若 $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{AC} = 7$ ， $\overline{EC} = 48$ ， $\overline{CD} = 40$ ，求 \overline{ED} 。

28



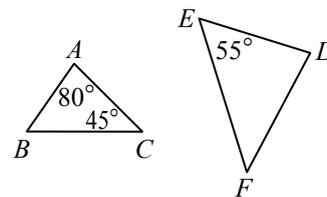
★ 習作類題

1. 已知四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $PQRS$ ， $A、B、C、D$ 的對應頂點依序為 $P、Q、R、S$ ，若 $\angle A : \angle B : \angle C = 5 : 1 : 3$ ， $\angle D = 45^\circ$ ，求 $\angle Q + \angle R$ 。

140°

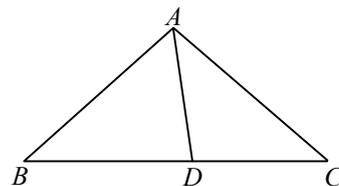
2. 如圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中， $\angle A = 80^\circ$ ， $\angle C = 45^\circ$ ， $\angle E = 55^\circ$ ，且 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ ，已知 $\angle D = (4x + y)^\circ$ ， $\angle F = (3y - x)^\circ$ ，求 $x、y$ 的值。

$x = 15$ ， $y = 20$



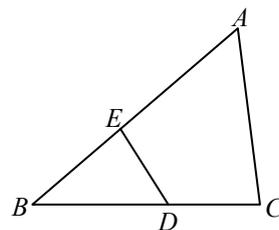
3. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 12$ ， $\overline{AD} = \overline{CD} = 8$ ，求 \overline{BC} 。

18



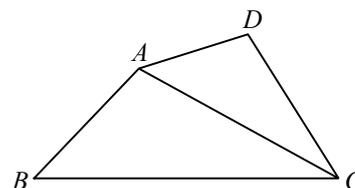
4. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $D、E$ 為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上兩點，若 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{BD} = 3$ ， $\overline{BE} = 2.5$ ， $\overline{DE} = 2$ ，求 \overline{AC} 。

4



5. 如圖，若 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ ，且 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{CD} = 4.5$ ，求 \overline{AD} 、 \overline{BC} 。

$\overline{AD} = 3$ ， $\overline{BC} = 8$



★ 課本重點整理

1. 相似三角形的比例關係

兩個相似三角形有下列關係：

- (1) 對應高的比 = 對應邊長的比；
(2) 面積的比 = 對應邊長的平方比。



2. 生活中的應用

生活中無法直接求得的距離或長度，可利用相似三角形作簡易測量。



3. 特殊直角三角形的邊長比

(1) 直角三角形 ABC 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

則 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$ 。

(2) 等腰直角三角形 ABC 中， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

則 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 。



4. 三角比

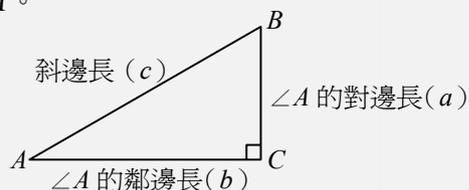
如圖，在直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，

(1) $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 簡記成 $\sin A$ (讀做 sine A)，即 $\frac{a}{c} = \sin A$ 。

(2) $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 簡記成 $\cos A$ (讀做 cosine A)，即 $\frac{b}{c} = \cos A$ 。

(3) $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}}$ 簡記成 $\tan A$ (讀做 tangent A)，即 $\frac{a}{b} = \tan A$ 。

這三個比值，皆稱為 $\angle A$ 的三角比。

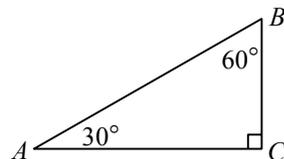


★ 小試身手

1. 直角三角形 ABC 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，下列敘述正確打○，不正確打×：

(1) (×) $\overline{BC} : \overline{AC} = 1 : 2$ 。

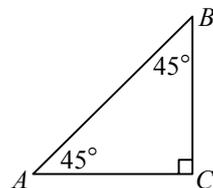
(2) (○) $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{1}{2}$ ，即 $\sin A = \frac{1}{2}$ 。



2. 直角三角形 ABC 中， $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，下列敘述正確打○，不正確打×：

(1) (○) $\overline{BC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{2}$ 。

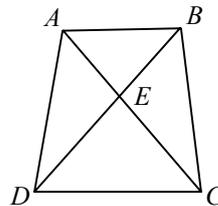
(2) (○) $\frac{\angle B \text{ 的對邊長}}{\angle B \text{ 的鄰邊長}} = 1$ ，即 $\tan B = 1$ 。



★ 課習演練

1. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為梯形， $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ，若 \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 E 點，且 $\triangle ABE$ 的面積為 4， $\triangle CDE$ 的面積為 9，回答下列問題：

- (1) $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDE$ 是否相似？
 (2) $\overline{AB} : \overline{DC}$ 。
 (3) $\overline{BE} : \overline{ED}$ 。



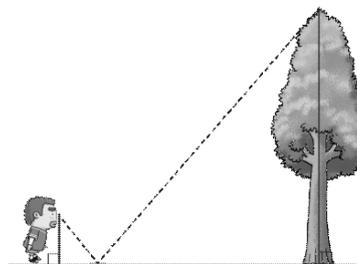
習作 P17 基礎 2



1. (1) 是
 (2) 2 : 3
 (3) 2 : 3

2. 如圖，威利在地上放了一面鏡子，透過鏡子的反射（入射角等於反射角），他可以看見樹梢。已知威利與鏡子的距離是 1.2 公尺，鏡子與樹的距離是 6 公尺，威利眼睛離地面的高度是 1.5 公尺，求樹高。

7.5 公尺

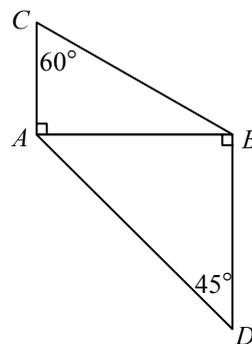


課本 P82 自評 3



3. 如圖， $\angle CAB = \angle ABD = 90^\circ$ ， $\angle C = 60^\circ$ ， $\angle D = 45^\circ$ ，若 $\overline{AC} = 6$ ，求 \overline{AD} 。

$6\sqrt{6}$

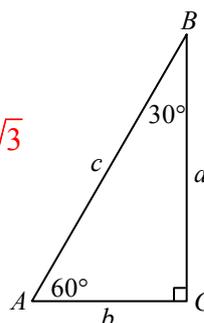


習作 P19 基礎 5



4. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{AC} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ ，求 $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}}$ 。

$$\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \sqrt{3}$$



課本 P83 自評 5



★課本類題

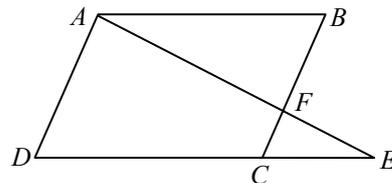
1. 如圖， $\square ABCD$ 中， E 為 \overline{DC} 上的一點， \overline{AE} 與 \overline{BC} 交於 F 點，若 $\overline{AB} = 16$ ， $\overline{CE} = 8$ ， $\triangle EDA$ 的面積為 63，回答下列問題：

(1) 在 $\triangle ABF$ 與 $\triangle EDA$ 中，

$$\therefore \angle BAF = \underline{\angle AED} \quad (\text{理由：}\overline{AB} \parallel \overline{DE}),$$

$$\underline{\angle ABF = \angle ADE} \quad (\text{理由：}\square ABCD \text{ 對角相等}),$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle EDA \quad (\underline{AA} \text{ 相似性質}).$$

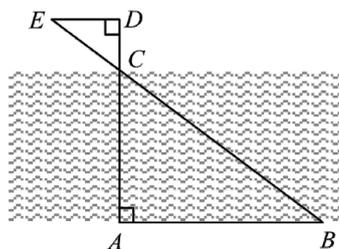


(2) 求 $\triangle ABF$ 的面積。

28

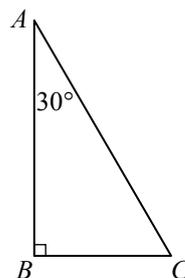
2. 如圖，軒宇想知道一條河道的寬，因此設計直角三角形 ABC 及直角三角形 DCE ，其中 A 、 C 、 D 三點及 B 、 C 、 E 三點分別在同一直線上，若軒宇測得 $\overline{AB} = 36$ 公尺， $\overline{CD} = 9$ 公尺， $\overline{DE} = 12$ 公尺，求河寬 \overline{AC} 。

27 公尺



3. 如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 6$ ，求 \overline{BC} 、 \overline{AC} 。

$$\overline{BC} = 2\sqrt{3}, \quad \overline{AC} = 4\sqrt{3}$$



4. 如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle C = 90^\circ$ ，且 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = 25 : 24 : 7$ ，將下列 $\triangle ABC$ 各邊長的比值分別以 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 表示。

(1) $\frac{7}{25}$ (2) $\frac{24}{25}$ (3) $\frac{7}{24}$

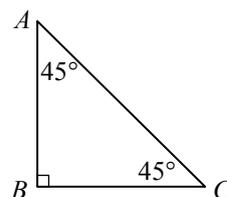
(1) $\sin A$ (2) $\cos A$ (3) $\tan A$



★ 習作類題

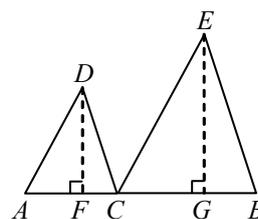
1. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \angle C = 45^\circ$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，若 $\overline{BC} = 4$ ，求 \overline{AC} 。

$4\sqrt{2}$



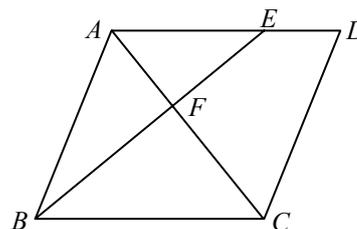
2. 如圖， $\triangle ACD \sim \triangle CBE$ ， C 在 \overline{AB} 上，且分別自 D 、 E 作垂線交 \overline{AB} 於 F 、 G ，若 $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 3$ ，求 $\triangle ACD$ 的面積： $\triangle CBE$ 的面積。

4 : 9



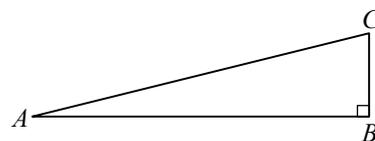
3. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，若 \overline{AC} 、 \overline{BE} 交於 F 點， E 點在 \overline{AD} 上，且 $\overline{AE} : \overline{ED} = 2 : 1$ ，求 $\triangle AEF$ 的面積： $\triangle CBF$ 的面積。

4 : 9



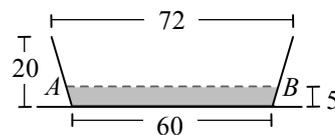
4. 如圖，已知坡度百分比 = $\frac{\text{鉛直上升高度}}{\text{水平移動距離}} \times 100\%$ ，若山坡的坡度為 15%，小七爬山坡鉛直上升了 3 公尺，則小七的水平移動距離為多少公尺？

20 公尺



5. 如圖，有一個花盆，其剖面為等腰梯形，下底為 60 公分，上底為 72 公分，花盆高為 20 公分，小年往花盆內倒入了 5 公分高的水，此時水面的寬 \overline{AB} 為多少公分？

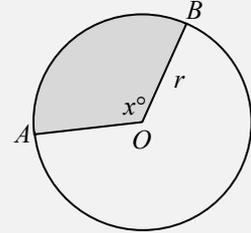
63 公分



★ 課本重點整理

1. 扇形的面積與弧長

圓心角為 x° 的扇形，其面積為圓面積的 $\frac{x}{360}$ ，
即 $\pi r^2 \times \frac{x}{360}$ ；其弧長為圓周長的 $\frac{x}{360}$ ，即 $2\pi r \times \frac{x}{360}$ 。



2. 點與圓的位置關係

點與圓的位置關係	在圓內	在圓上	在圓外
圖示			
點到圓心的距離	小於半徑 ($\overline{OA} < r$)	等於半徑 ($\overline{OB} = r$)	大於半徑 ($\overline{OC} > r$)



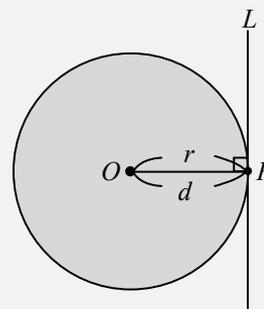
3. 直線與圓的位置關係

圖示			
圓心到直線的距離	$d > r$ 直線 L 與圓 O 不相交	$d = r$ 當直線 L 通過 P 點時， L 稱為圓 O 的切線， P 稱為切點。	$d < r$ 當直線 L 與圓 O 交於兩點， L 稱為圓 O 的割線。
直線與圓的位置關係	不相交	只交於一點	交於兩點



4. 圓與切線的關係

- (1) 一個圓的切線 L 必垂直於圓心與切點的連線 \overline{OP} 。
- (2) 圓心到切線的距離 d 等於圓的半徑 r 。
- (3) 若過圓上一點 P 的直線 L 垂直於過 P 點的半徑 \overline{OP} ，則直線 L 為該圓的切線。



5. 過圓外一點的兩切線性質

如圖， \overline{PA} 、 \overline{PB} 為圓 O 的兩條切線， A 、 B 為切點，則：

- (1) 過圓外一點 P 的兩切線段長相等，即 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 。
- (2) $\angle APO = \angle BPO$ ，即 \overline{OP} 平分 $\angle APB$ 。
- (3) \overline{OP} 垂直平分 \overline{AB} 。



6. 弦與弦心距的性質

- (1) 通過圓心與弦垂直的直線會平分此弦；弦的中垂線會通過圓心。
- (2) 在同圓或等圓中，若弦心距相等，則所對應的弦等長；若弦等長，則所對應的弦心距相等。
- (3) 在同圓或等圓中，若弦心距愈長，則所對應的弦愈短；若弦愈短，則所對應的弦心距愈長。



★ 小試身手

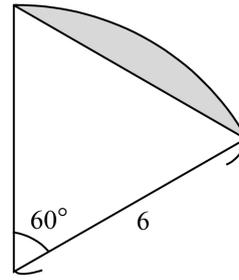
下列敘述正確打○，不正確打×：

- (1) (○) 圓 O 的直徑為 6，若 $\overline{OP} = 3$ ，則 P 點在圓 O 上。
- (2) (×) A 點為圓 O 上之一點，若直線 L 通過 A 點，則直線 L 稱為圓 O 的切線。
- (3) (×) 在同一圓中，弦心距越長，則所對應的弦越長。
- (4) (○) 圓 O 的半徑為 8，若圓心到直線 L 的距離為 6，則直線 L 與圓 O 有 2 個交點。

★ 課習演練

1. 如圖，已知扇形的半徑為 6 公分，圓心角為 60° ，則灰色弓形面積為多少平方公分？

$(6\pi - 9\sqrt{3})$ 平方公分



課本 P111 自評 1



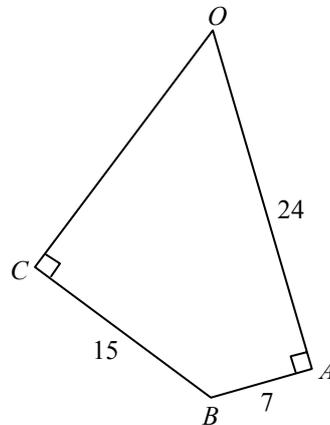
2. 如圖，四邊形 $OABC$ 中， $\angle A$ 和 $\angle C$ 均為直角， $\overline{OA} = 24$ ， $\overline{AB} = 7$ ， $\overline{BC} = 15$ ，回答下列問題：

(1) 求 \overline{OC} 。

(2) 若以 O 點為圓心， \overline{OA} 為半徑畫圓，則 A 、 B 、 C 三點會分別落在圓內、圓上或圓外？

(1) 20

(2) A 點在圓上， B 點在圓外， C 點在圓內。



課本 P111 自評 2

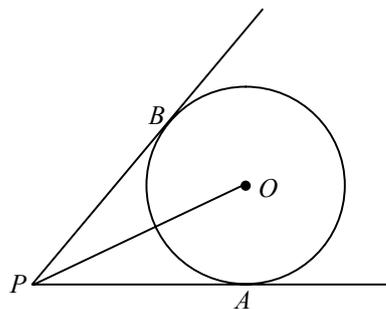


3. 如圖， \overline{PA} 、 \overline{PB} 為圓 O 的切線，且 A 、 B 為切點， $\angle APB = 50^\circ$ ，求 $\angle POB$ 。

習作 P29 基礎 4



65°

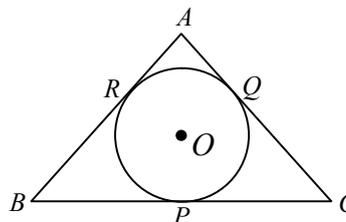


4. 如圖，等腰三角形 ABC 分別與圓 O 相切於 P 、 Q 、 R 三點，其中 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。若 $\overline{AR} = 2$ ， $\overline{CP} = 4$ ，求 \overline{AB} 。

習作 P29 基礎 6



6

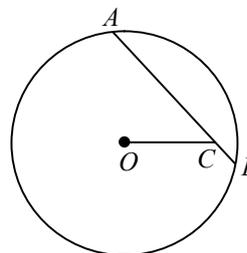


5. 如圖， \overline{AB} 為圓 O 的一弦，且 C 點在 \overline{AB} 上。若 $\overline{AC} = 5$ ， $\overline{BC} = 1$ ， \overline{AB} 的弦心距為 2，求 \overline{OC} 。

習作 P30 基礎 7



$2\sqrt{2}$



★課本類題

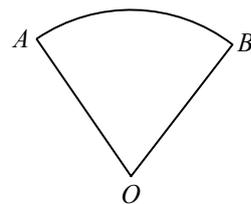
1. 如圖，扇形 AOB 中，已知 $\overline{OA} = 10$ ，且 \widehat{AB} 的長為 4π ，求：

(1) $\angle AOB$ 。

(2) 扇形 AOB 的面積。

(1) 72°

(2) 20π

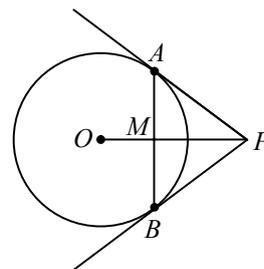


2. 已知圓 O 直徑為 10，且 D 、 E 、 F 三點與圓心 O 的距離分別為 7、5、4，則 D 、 E 、 F 三點與圓 O 的位置關係為何？（圓內、圓上或圓外）

D 點在圓外， E 點在圓上， F 點在圓內

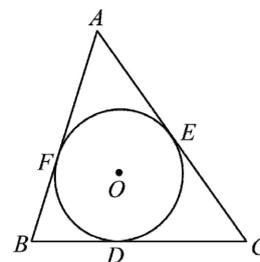
3. 如圖， \overline{PA} 、 \overline{PB} 切圓 O 於 A 、 B 兩點， \overline{OP} 與 \overline{AB} 交於 M 點，若 $\overline{OP} = 15$ ， $\overline{AP} = 12$ ，求 \overline{AB} 。

$\frac{72}{5}$



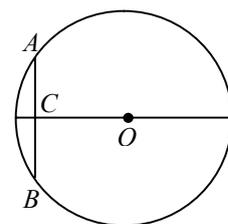
4. 如圖， $\triangle ABC$ 三邊分別與圓 O 相切於 D 、 E 、 F 三點，已知 $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{AC} = 14$ ，求 \overline{AF} 。

8



5. 如圖， \overline{AB} 為圓 O 的一弦，若 $\overline{AB} = 10$ ，圓 O 的半徑為 9，求弦心距 \overline{OC} 。

$2\sqrt{14}$



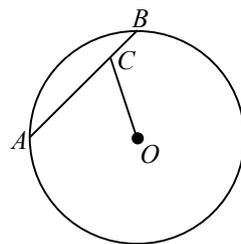
★ 習作類題

1. 已知圓 O 的直徑為 11，圓心 O 到直線 L 的距離為 6，求直線 L 與圓 O 的交點個數。

0 個交點

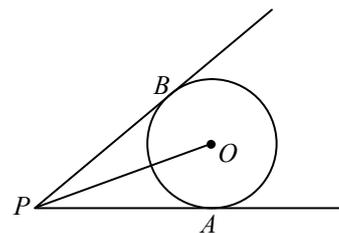
2. 如圖， \overline{AB} 為圓 O 的一弦，且 C 點在 \overline{AB} 上。若 $\overline{AC} = 3$ ， $\overline{BC} = 1$ ， \overline{AB} 的弦心距為 2，求 \overline{OC} 。

$\sqrt{5}$



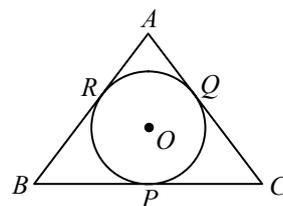
3. 如圖， \overline{PA} 、 \overline{PB} 為圓 O 的切線，且 A 、 B 為切點， $\angle APB = 40^\circ$ ，求 $\angle BOA$ 。

140°



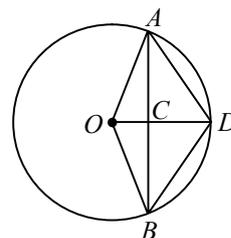
4. 如圖，等腰三角形 ABC 分別與圓 O 相切於 P 、 Q 、 R 三點，其中 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，若 $\overline{BC} = 18$ ， $\overline{AQ} = 6$ ，求 \overline{AB} 。

15



5. 如圖， \overline{AB} 為圓 O 的一弦，若 \overline{AB} 的弦心距為 5，圓 O 的半徑為 13，求 \overline{AD} 。

$4\sqrt{13}$



★ 課本重點整理

1. 弧的度數與長度



- (1) 弧的度數就是該弧所對圓心角的度數。
- (2) 在同圓或等圓中，度數相等的兩弧等長；
若兩弧等長，則它們所對的圓心角相等。
- (3) 在同圓或等圓中，度數愈大的弧，其弧的長度愈長。

2. 圓心角、圓周角與弧的關係

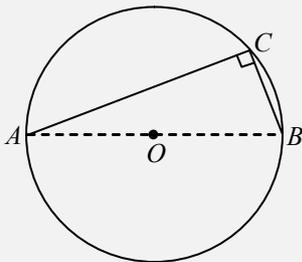


名稱	圓心角	圓周角
圖示		
性質	$\angle AOB = \widehat{AB}$	$\angle AOB = \frac{1}{2} \widehat{AB}$

3. 半圓的圓周角



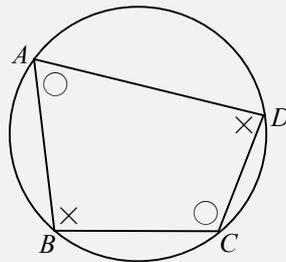
半圓所對的圓周角是直角。



4. 圓內接四邊形



圓內接四邊形的對角互補。



★ 小試身手

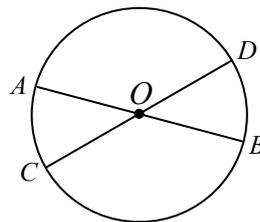
下列敘述正確打○，不正確打×：

- (1) (○) 同一圓中，度數越大的弧，其長度越長。
- (2) (×) \overline{AB} 、 \overline{CD} 為圓 O 的兩弦，若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，則 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ 。
- (3) (×) 半圓所對的圓心角為 90° 。
- (4) (○) 圓內接平行四邊形的任意角必為 90° 。

★ 課習演練

1. 如圖，直徑 \overline{AB} 、 \overline{CD} 把圓 O 分成四個弧，若圓 O 的半徑為 10，且 $\widehat{AC} : \widehat{AD} : \widehat{DB} : \widehat{BC} = 1 : 3 : 1 : 3$ ，求 $\angle AOC$ 與 \widehat{BC} 的長。

$$\angle AOC = 45^\circ, \widehat{BC} \text{ 的長} = \frac{15}{2} \pi$$

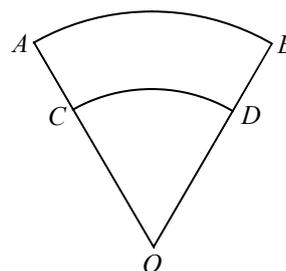


習作 P33 基礎 1



2. 如圖，已知 \widehat{AB} 和 \widehat{CD} 是以 O 點為圓心，不同半徑所畫出的相異弧，且 $\widehat{AB} = 6$ ， $\widehat{CD} = 4$ ， $\overline{OA} = 5$ ，求 \overline{OC} 。

$$\frac{10}{3}$$

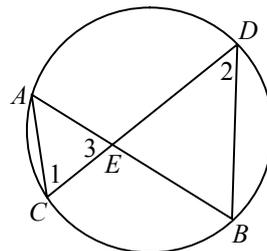


課本 P129 自評 2



3. 如圖，圓內兩弦 \overline{AB} 、 \overline{CD} 交於 E 點， $\angle BAC = 50^\circ$ ， $\angle ABD = 60^\circ$ ，求 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 及 $\angle 3$ 。

$$\angle 1 = 60^\circ, \angle 2 = 50^\circ, \angle 3 = 70^\circ$$

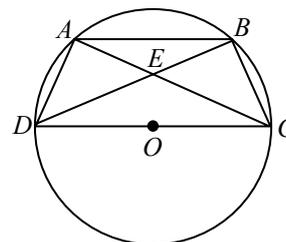


課本 P130 自評 4



4. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓內接梯形，且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，若 \overline{CD} 為直徑， $\angle ACD = 24^\circ$ ，求 \widehat{AB} 的度數、 $\angle CAD$ 和 $\angle CED$ 。

$$\widehat{AB} = 84^\circ, \angle CAD = 90^\circ, \angle CED = 132^\circ$$

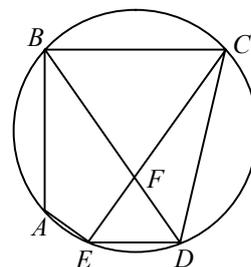


習作 P33 基礎 2



5. 如圖， A 、 B 、 C 、 D 、 E 為圓上的五個點，且 $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$ ， \overline{BD} 、 \overline{CE} 交於 F 點，若 $\angle DFE = 70^\circ$ ，求 $\angle BAE$ 。

$$125^\circ$$



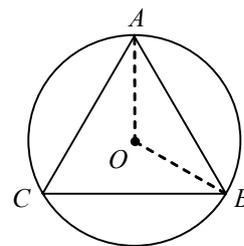
課本 P131 自評 6



★課本類題

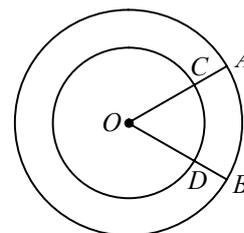
1. 如圖， $\triangle ABC$ 的頂點均在圓 O 上，且 $\angle AOB = 120^\circ$ ，求 $\angle ACB$ 。

60°



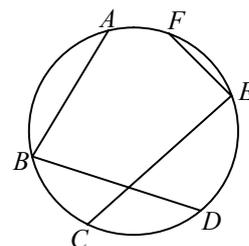
2. 如圖，兩同心圓中，已知 \widehat{AB} 的長度為 9π ， \widehat{CD} 的長度為 6π ，大圓的半徑為 24，求小圓的半徑。

16



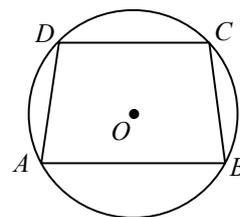
3. 如圖， A, B, C, D, E, F 為圓上六個點，已知 $\widehat{AF} = 34^\circ$ ， $\widehat{CD} = 66^\circ$ ， $\angle E = 87^\circ$ ，求 $\angle B$ 。

77°



4. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\angle A = 80^\circ$ ，求 $\angle B$ 。

80°



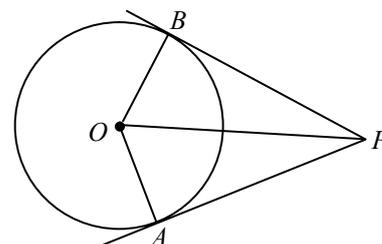
5. 如圖， \overline{PA} 、 \overline{PB} 是 P 點到圓 O 的兩條切線，已知圓 O 的半徑長為 $2\sqrt{3}$ ，切線長 $\overline{PB} = 6$ ， $\widehat{AB} = 120^\circ$ ，求：

(1) $\angle AOB$ 。

(2) \overline{OP} 。

(1) 120°

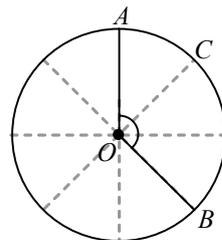
(2) $4\sqrt{3}$



★ 習作類題

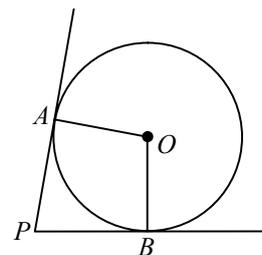
1. 如圖，將圓切成八等分，求 \widehat{ACB} 所對應的圓心角度數。

135°



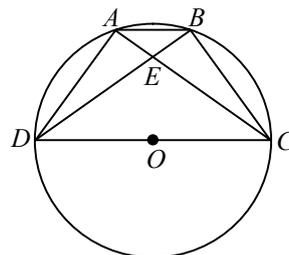
2. 如圖， \overline{PA} 、 \overline{PB} 切圓 O 於 A 、 B 兩點，若 $\angle P=80^\circ$ ，求 \widehat{AB} 的度數。

100°



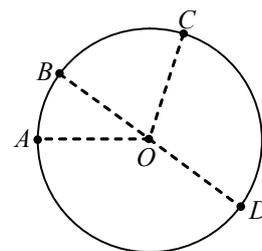
3. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓內接梯形， \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 E 點，且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，若 \overline{CD} 為直徑， $\angle ACD=36^\circ$ ，求 $\angle CED$ 。

108°



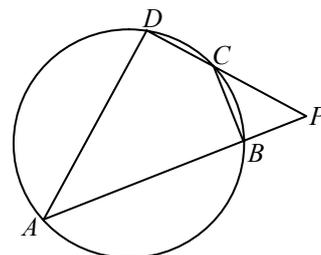
4. 如圖， A 、 B 、 C 、 D 四點將圓 O 分成四個弧，若圓 O 的半徑為 10，且 $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{AD} = 1 : 2 : 3 : 4$ ，求 $\angle BOC$ 與 \widehat{BC} 的長。

$\angle BOC=72^\circ$ ， \widehat{BC} 的長 $=4\pi$



5. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形， \overline{AB} 、 \overline{CD} 交於 P 點，若 $\angle P=50^\circ$ ， $\angle ADC=90^\circ$ ，求 $\angle BCP$ 。

40°



★ 課本重點整理

1. 推理與證明

- (1) 將「題目所給的條件」寫在 **已知**。
- (2) 將「要說明的結論」寫在 **求證**。
- (3) 將「推導或說明的過程」寫在 **證明**。



2. 思路分析與證明

推理證明的思考與分析，可先從「結論」推論到「題目所給的條件」，但在寫作推理的過程中，則是依據分析的結果，由「題目所給的條件」逐步推理至「結論」。



3. 輔助線

- (1) 幾何推理進行中，有時需要在原圖形上添加一些線條或圖形，協助進行推理證明或計算，這種添加的線條或圖形就稱為輔助線。
- (2) 不同的思路會產生不同的輔助線畫法與證法。



4. 偶數與奇數表示方法

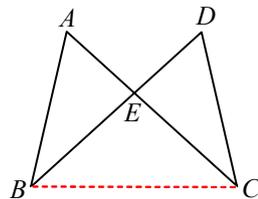
- (1) 當 k 為整數時，所有表示為 $2k$ 形式的數皆為偶數。
反之，偶數皆可寫成 $2k$ 的形式。
- (2) 當 k 為整數時，所有表示為 $2k+1$ 或 $2k-1$ 形式的數皆為奇數。
反之，奇數皆可寫成 $2k+1$ 或 $2k-1$ 的形式。



★ 小試身手

下列敘述正確打○，不正確打×：

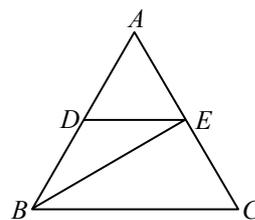
- (1) (○) 寫作推理的過程為 **已知**、**求證**、**證明**。
- (2) (×) 推理過程從結論逆推，會導致推導過程出錯。
- (3) (○) 如圖，若要證明 $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ ，需畫輔助線 \overline{BC} 。
- (4) (○) 如圖， $\angle AEB = \angle DEC$ 為 **已知** 條件。
- (5) (×) 已知 A 為奇數， B 為偶數，則 $A+2B$ 必為偶數。



★ 課習演練

1. 如圖， \overline{BE} 為 $\angle ABC$ 的角平分線， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\triangle ADE$ 的周長為 8， $\overline{BE} = 4$ ，
回答下列問題：

習作 P42 基礎 1



(1) 求證 $\triangle BDE$ 為等腰三角形。

(2) 求 $\triangle ABE$ 的周長。

(1) $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $\therefore \angle EBC = \angle DEB$ 。

又 \overline{BE} 為 $\angle ABC$ 的角平分線， $\therefore \angle EBC = \angle DBE$ 。

則 $\angle DEB = \angle DBE$ ，故 $\triangle BDE$ 為等腰三角形。

(2) 12

2. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形， G 為 \overline{BD} 與 \overline{AC} 的交點，且 E 、 F 為 \overline{BD} 上的
兩點，若 \overline{AE} 、 \overline{CF} 皆垂直於 \overline{BD} ，求證四邊形 $AECF$ 為平行四邊形。

習作 P43 基礎 3



證明

(1) \because 四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形， $\therefore \overline{GA} = \overline{GC}$ 。

(2) 在 $\triangle AGE$ 與 $\triangle CGF$ 中，

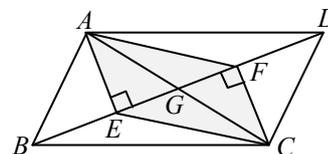
$\because \angle AGE = \angle CGF$ (對頂角相等)，

$\angle AEG = \angle CFG = 90^\circ$ ， $\overline{GA} = \overline{GC}$ ，

$\therefore \triangle AGE \cong \triangle CGF$ (AAS 全等性質)，故 $\overline{GE} = \overline{GF}$ 。

由(1)、(2)可知， $\overline{GA} = \overline{GC}$ 且 $\overline{GE} = \overline{GF}$ ，

故四邊形 $AECF$ 為平行四邊形 (兩條對角線互相平分)。



3. 已知 $5 \times 2 + 1 \times 3 = 13$ ， $7 \times 2 + 9 \times 3 = 41$ ， $11 \times 2 + 9 \times 3 = 49$ ，由這三個例子猜測
「一個奇數的 2 倍，加上另一個奇數的 3 倍，還是奇數。」這個猜測正確嗎？

課本 P155 自評 4



已知 a 、 b 是奇數。

求證 $2a + 3b$ 也是奇數。

證明 $\because a$ 、 b 是奇數， \therefore 設 $a = 2m + 1$ ， $b = 2n + 1$ ， m 、 n 都是整數。

$$2a + 3b = 2(2m + 1) + 3(2n + 1)$$

$$= 4m + 2 + 6n + 3$$

$$= 2(2m + 1 + 3n + 1) + 1,$$

故 $2a + 3b$ 也是奇數。

4. 已知 a 是正整數， $A = (5a + 8)^2 + 4(5a + 8) + 4$ ，求證 A 是 25 的倍數。

課本 P155 自評 5



證明 $A = (5a + 8)^2 + 4(5a + 8) + 4$

$$= 25a^2 + 80a + 64 + 20a + 32 + 4$$

$$= 25a^2 + 100a + 100$$

$$= 25(a^2 + 4a + 4)$$

$\because a^2 + 4a + 4$ 為正整數，故 A 是 25 的倍數。

★課本類題

1. **已知** 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， \overline{BE} 平分 $\angle ABC$ ， \overline{CD} 平分 $\angle ACB$ 。

求證 $\overline{AE} = \overline{AD}$ 。

證明 在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ACD$ 中，

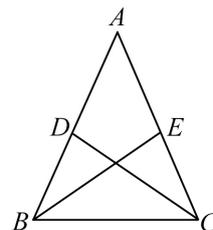
$$\because \overline{AB} = \overline{AC} \text{ (已知),}$$

$$\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \angle ACB = \angle ACD$$

$$\angle A = \angle A \text{ (公用角),}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD \text{ (ASA 全等性質),}$$

$$\text{故 } \overline{AE} = \overline{AD} \text{。}$$



2. **已知** 如圖，長方形 $ABCD$ 中， E 、 F 兩點在 \overline{BD} 上，且 \overline{AE} 與 \overline{CF} 分別垂直於 \overline{BD} 。

求證 $\overline{AF} = \overline{EC}$ 。

證明 在 $\triangle AEF$ 與 $\triangle CFE$ 中，連接 \overline{AF} 、 \overline{EC} ，

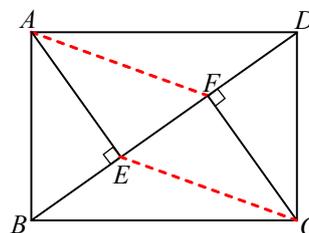
$$\because \overline{AE} = \overline{CF} \text{ (底邊上的高),}$$

$$\angle AEF = \angle CFE = 90^\circ \text{ (已知),}$$

$$\overline{EF} = \overline{EF} \text{ (公用邊),}$$

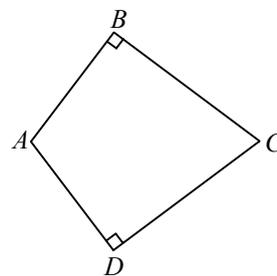
$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CFE \text{ (SAS 全等性質),}$$

$$\text{故 } \overline{AF} = \overline{EC} \text{。}$$



3. 如圖，四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{AD} = 9$ ， $\overline{CD} = 12$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ，求四邊形 $ABCD$ 的面積。

108



4. **已知** $a > 0$ ， $b < 0$ ，且 $|b| > |a|$ 。

求證 $a^2 < b^2$ 。

證明 $\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

已知 $a > 0$ ， $b < 0$ ， $\therefore a - b > 0$ ，

又 $|b| > |a|$ ， $\therefore a + b < 0$ ，

故 $(a - b)(a + b) < 0$ ，

即 $a^2 - b^2 < 0$

$$a^2 < b^2$$

★ 習作類題

1. 將 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 圍成右圖區域，若 $\angle A=24^\circ$ ， $\angle B=60^\circ$ ， $\angle C=26^\circ$ ，回答下列問題：
 (1) 求證： $\angle ABC = \angle ADC - \angle BAD - \angle BCD$ ，(2) 求 $\angle ADC$ 。

(1) 連接 \overline{AC} ， $\therefore \angle ADC + \angle DAC + \angle DCA = 180^\circ$

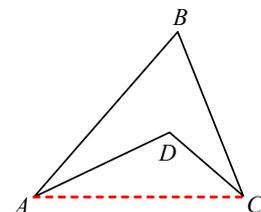
$$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ$$

$$\angle ADC + \angle DAC + \angle DCA = \angle ABC + \angle BAC + \angle BCA$$

$$\angle ABC = \angle ADC + (\angle DAC - \angle BAC) + (\angle DCA - \angle BCA)$$

$$= \angle ADC - \angle BAD - \angle BCD$$

(2) 110°



2. 如圖， G 為 \overline{AC} 、 \overline{BD} 的中點，過 G 點作 \overline{EF} ，分別交 \overline{AB} 、 \overline{CD} 於 E 、 F 兩點，回答下列問題：
 (1) 求證： $\angle A = \angle C$ ，(2) 求 $\overline{EG} : \overline{GF}$ 。

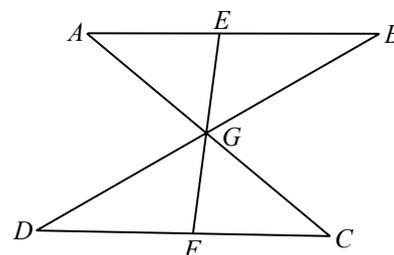
(1) 在 $\triangle ABG$ 與 $\triangle CGD$ 中，

$$\therefore \overline{AG} = \overline{CG}、\overline{BG} = \overline{DG} \text{ (} G \text{ 為 } \overline{AC}、\overline{BD} \text{ 的中點),}$$

$$\angle AGB = \angle DGC \text{ (對頂角),}$$

$$\triangle ABG \cong \triangle CGD \text{ (SAS 全等性質), 故 } \angle A = \angle C.$$

(2) $1 : 1$



3. **已知** a 為奇數， b 為偶數。

求證 $3a - 2b$ 是 奇數 (填偶數或奇數)。

證明 $\therefore a$ 為奇數， b 為偶數，

$$\therefore \text{設 } a = 2m + 1, b = 2n, m、n \text{ 是整數,}$$

$$\therefore \text{設 } 3a - 2b = 3(2m + 1) - 2(2n)$$

$$= 6m + 3 - 4n$$

$$= 2(3m - 2n + 1) + 1$$

$$\therefore 3m - 2n + 1 \text{ 為整數,}$$

故 $3a - 2b$ 是奇數。

4. **已知** $a^2 + 1 = (2b + 7)^2$ ，其中 b 為正整數。

求證 a^2 是 4 的倍數。

證明 $\therefore a^2 + 1 = (2b + 7)^2$

$$a^2 = (2b + 7)^2 - 1^2$$

$$= (2b + 7 + 1)(2b + 7 - 1)$$

$$= (2b + 8)(2b + 6)$$

$$= 4(b + 4)(b + 3)$$

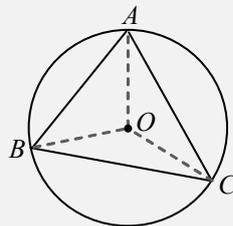
$$\therefore (b + 4)(b + 3) \text{ 為正整數,}$$

故 a^2 是 4 的倍數。

★ 課本重點整理

1. 外心

(1) 三角形的外心：三角形三邊的中垂線交於一點，此點稱為三角形的外心，外心到三頂點的距離相等，且外心也是此三角形外接圓的圓心。

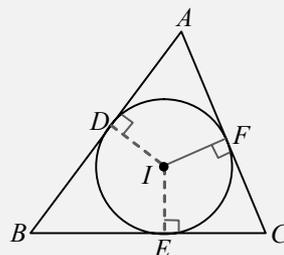


(2) 三角形外心的位置：

銳角三角形	直角三角形	鈍角三角形
外心在三角形內部	外心在三角形的斜邊中點	外心在三角形外部

2. 內心

(1) 三角形的內心： $\triangle ABC$ 三內角的角平分線交於一點 I ，此點 I 稱為三角形的內心，內心到三邊的距離相等，且內心也是此三角形內切圓的圓心。



(2) 三角形內心與面積：若 I 點為 $\triangle ABC$ 的內心，則
 $\triangle AIB$ 面積： $\triangle BIC$ 面積： $\triangle CIA$ 面積 = \overline{AB} ： \overline{BC} ： \overline{CA} 。

(3) 三角形的內切圓半徑：

① 若 r 為三角形的內切圓半徑， S 為三角形的周長，則三角形的面積為 $\frac{1}{2}rS$ 。

② 若 r 為直角三角形的內切圓半徑，則兩股和 = 斜邊長 + $2r$ ，即 $r = \frac{\text{兩股和} - \text{斜邊長}}{2}$ 。

(4) 三角形的內心必定在三角形的內部。

3. 重心

(1) 三角形的三條中線交於一點，此點為三角形的重心。

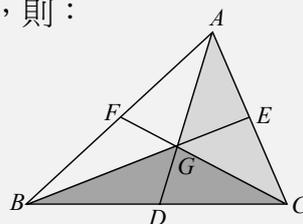
(2) 如圖， $\triangle ABC$ 中， \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 為三條中線， G 點為重心，則：

① $\overline{AG} : \overline{GD} = \overline{BG} : \overline{GE} = \overline{CG} : \overline{GF} = 2 : 1$ ；

$\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AD}$ ， $\overline{BG} = \frac{2}{3} \overline{BE}$ ， $\overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CF}$ 。

② $\triangle AGB$ 面積 = $\triangle BGC$ 面積 = $\triangle CGA$ 面積 = $\frac{1}{3} \triangle ABC$ 面積。

③ $\triangle AGF$ 面積 = $\triangle BGF$ 面積 = $\triangle BGD$ 面積
 = $\triangle CGD$ 面積 = $\triangle CGE$ 面積 = $\triangle AGE$ 面積 = $\frac{1}{6} \triangle ABC$ 面積。



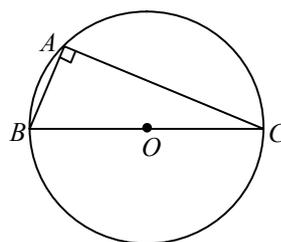
(3) 三角形的重心必定在三角形的內部。

★ 課習演練

1. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $\overline{AB}=5$ ， $\triangle ABC$ 的面積為 30，求 $\triangle ABC$ 的外接圓面積。

習作 P47 基礎 1

$$\frac{169}{4} \pi$$



2. $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=60^\circ$ ， $\angle B=40^\circ$ ，若 O 點為 $\triangle ABC$ 的外心，求 $\angle BOC$ 。

課本 P186 自評 2

$$120^\circ$$



3. $\triangle ABC$ 的面積為 24，其內切圓半徑為 2，求 $\triangle ABC$ 的周長。

課本 P186 自評 3

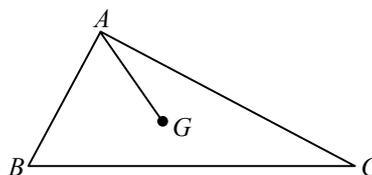
$$24$$



4. 如圖， $\triangle ABC$ 中， G 為重心， $\overline{AB}=8$ ， $\overline{AC}=15$ ， $\angle B+\angle C=90^\circ$ ，求 \overline{AG} 。

課本 P187 自評 5

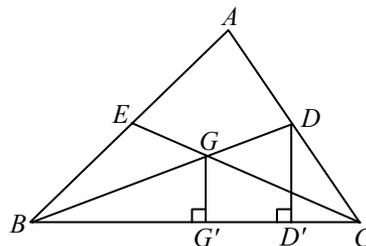
$$\frac{17}{3}$$



5. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 \overline{AC} 、 \overline{AB} 的中點，且 \overline{BD} 、 \overline{CE} 交於 G 點，若 $\overline{CG'}$ 與 $\overline{DD'}$ 皆垂直於 \overline{BC} ，求 $\overline{GG'} : \overline{DD'}$ 。

習作 P49 基礎 7

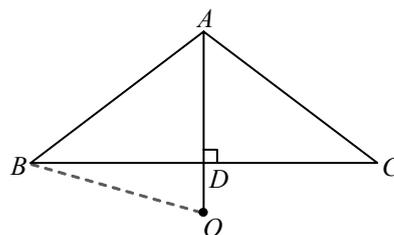
$$2 : 3$$



★課本類題

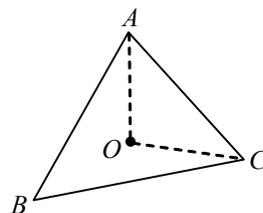
1. 如圖， O 點為等腰三角形 ABC 的外心， $\overline{AB} = \overline{AC} = 15$ ， $\overline{BC} = 24$ ， \overline{AD} 垂直平分 \overline{BC} ， O 點在 \overline{AD} 的延長線上，求 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。

$\frac{25}{2}$



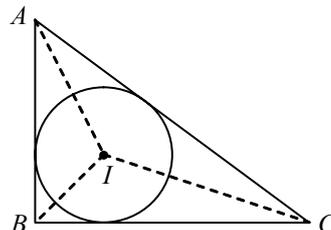
2. 如圖， $\triangle ABC$ 中， O 點為 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\angle ABC = 49^\circ$ ，求 $\angle AOC$ 。

98°



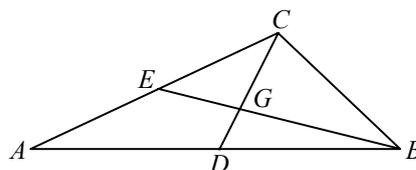
3. 如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle B = 90^\circ$ ， I 點為內心，若 $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{BC} = 16$ ，求 $\triangle AIB$ 的面積： $\triangle BIC$ 的面積： $\triangle AIC$ 的面積。

$3 : 4 : 5$



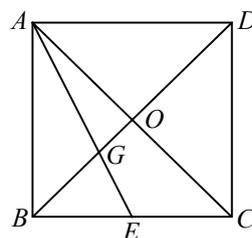
4. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點， \overline{BE} 、 \overline{CD} 交於 G 點，若 $\overline{CG} + \overline{BG} = 16$ ，求 $\overline{BE} + \overline{CD}$ 。

24



5. 如圖，正方形 $ABCD$ 中， O 為對角線的交點， E 為 \overline{BC} 中點，且 \overline{AE} 、 \overline{BD} 交於 G 點，若 $\overline{AB} = 9$ ，求 \overline{BG} 。

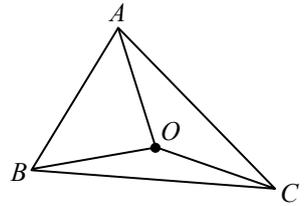
$3\sqrt{2}$



★ 習作類題

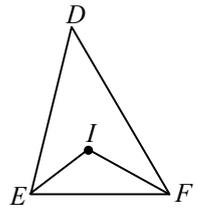
1. 如圖， $\triangle ABC$ 中， O 點為外心，若 $\overline{OA} = 3$ ，求 $\overline{OB} + \overline{OC}$ 。

6



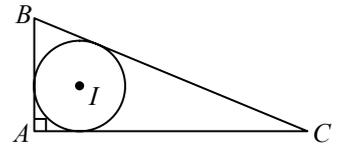
2. 如圖， $\triangle DEF$ 中， I 點為內心，若 $\angle EIF = 112^\circ$ ，求 $\angle D$ 。

44°



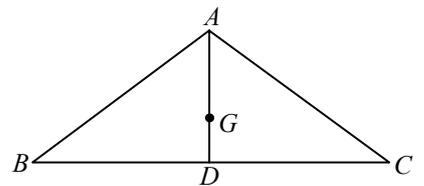
3. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，已知 $\overline{BC} = 26$ ， $\overline{AC} = 24$ ，求 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。

4



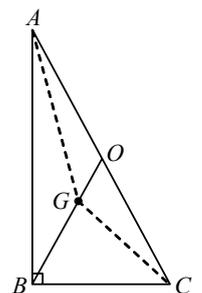
4. 如圖， G 點為 $\triangle ABC$ 的重心， $\overline{AB} = \overline{AC} = 20$ ， $\overline{DG} = 4$ ，求 \overline{BC} 。

32



5. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{AC} = 17$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， G 點為重心， O 點為 $\triangle ABC$ 的斜邊中點，求 $\triangle AGC$ 的面積。

20



1-1 連比

★小試身手

- (1) ○ (2) × (3) × (4) ×
(5) ○

★課習演練

1. (1) $8 : 12 : 15$ (2) $18 : 10 : 15$
2. $15 : 10 : 8$
3. 9
4. 柳橙汁 9 公升，蘋果汁 6 公升，
芭樂汁 9 公升
5. (1) $9 : 5 : 4$ (2) 90°

★課本類題

1. $10 : 12 : 15$
2. $4 : 1 : 6$
3. $x=18, y=27, z=36$
4. 800 個
5. $28 : 24 : 21$

★習作類題

1. (1) $7 : 22 : 12$ (2) $24 : 45 : 56$
2. $21 : 28 : 8$
3. $x=24, y=48, z=60$
4. $x=42, y=28, z=56$
5. $6 : 5 : 4$

1-2 比例線段

★小試身手

- (1) ○ (2) × (3) ○

★課習演練

1. (1) 6 (2) 10
2. 5
3. (1) 是 (2) $3 : 5$
 (3) $3 : 10$
4. 75 公分
5. 18

★課本類題

1. (1) $1 : 5$ (2) $5 : 6$
2. 8
3. 是，因為 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC} = 3 : 13$
4. (1) 是 (2) 39
5. 21

★習作類題

1. 150
2. 13
3. $\frac{50}{3}$
4. 21
5. 10 公分

1-3 相似多邊形

★ 小試身手

1. (1) ○ (2) ×
 2. (1) × (2) ○

★ 課習演練

1. 12
 2. (1) $\overline{A'B'} = 5$, $\overline{C'D'} = 20$
 (2) $\angle A' = 52^\circ$, $\angle B' = 130^\circ$
 3. (1) 2.4 (2) 2.8
 4. $x = 30$, $y = 10$

★ 課本類題

1. 2 公分, 135°
 2. (1) 是 (2) 是
 (3) 是
 3. 6
 4. $\frac{20}{3}$
 5. 28

★ 習作類題

1. 140°
 2. $x = 15$, $y = 20$
 3. 18
 4. 4
 5. $\overline{AD} = 3$, $\overline{BC} = 8$

1-4 相似三角形的應用與三角比

★ 小試身手

1. (1) × (2) ○
 2. (1) ○ (2) ○

★ 課習演練

1. (1) 是 (2) 2 : 3
 (3) 2 : 3
 2. 7.5 公尺
 3. $6\sqrt{6}$
 4. $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{1}{2}$,
 $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \sqrt{3}$

★ 課本類題

1. (1) $\angle AED$, $\angle ABF = \angle ADE$, AA
 (2) 28
 2. 27 公尺
 3. $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AC} = 4\sqrt{3}$
 4. (1) $\sin A$ (2) $\cos A$
 (3) $\tan A$

★ 習作類題

1. $4\sqrt{2}$
 2. 4 : 9
 3. 4 : 9
 4. 20 公尺
 5. 63 公分

2-1 點、線、圓

★ 小試身手

- (1) ○ (2) × (3) × (4) ○

★ 課習演練

- $(6\pi - 9\sqrt{3})$ 平方公分
- (1) 20
(2) A 點在圓上, B 點在圓外, C 點在圓內。
- 65°
- 6
- $2\sqrt{2}$

★ 課本類題

- (1) 72° (2) 20π
- D 點在圓外, E 點在圓上, F 點在圓內
- $\frac{72}{5}$
- 8
- $2\sqrt{14}$

★ 習作類題

- 0 個交點
- $\sqrt{5}$
- 140°
- 15
- $4\sqrt{13}$

2-2 圓心角與圓周角

★ 小試身手

- (1) ○ (2) × (3) × (4) ○

★ 課習演練

- $\angle AOC = 45^\circ$, \widehat{BC} 的長 = $\frac{15}{2}\pi$
- $\frac{10}{3}$
- $\angle 1 = 60^\circ$, $\angle 2 = 50^\circ$, $\angle 3 = 70^\circ$
- $\widehat{AB} = 84^\circ$, $\angle CAD = 90^\circ$, $\angle CED = 132^\circ$
- 125°

★ 課本類題

- 60°
- 16
- 77°
- 80°
- (1) 120° (2) $4\sqrt{3}$

★ 習作類題

- 135°
- 100°
- 108°
- $\angle BOC = 72^\circ$, \widehat{BC} 的長 = 4π
- 40°

3-1 推理證明

★ 小試身手

- (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ○
 (5) ×

★ 課習演練

1. (1) $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $\therefore \angle EBC = \angle DEB$ 。
 又 \overline{BE} 為 $\angle ABC$ 的角平分線，
 $\therefore \angle EBC = \angle DBE$ 。
 則 $\angle DEB = \angle DBE$ ，
 故 $\triangle BDE$ 為等腰三角形。
- (2) 12
2. (1) \because 四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，
 $\therefore \overline{GA} = \overline{GC}$ 。
 (2) 在 $\triangle AGE$ 與 $\triangle CGF$ 中，
 $\therefore \angle AGE = \angle CGF$ (對頂角相等)，
 $\angle AEG = \angle CFG = 90^\circ$, $\overline{GA} = \overline{GC}$ ，
 $\therefore \triangle AGE \cong \triangle CGF$ (AAS 全等性質)，
 故 $\overline{GE} = \overline{GF}$ 。
 由(1)、(2)可知， $\overline{GA} = \overline{GC}$ 且 $\overline{GE} = \overline{GF}$ ，
 故四邊形 $AECF$ 為平行四邊形
 (兩條對角線互相平分)。
3. $\because a, b$ 是奇數，
 \therefore 設 $a = 2m + 1, b = 2n + 1, m, n$ 都是整數。
 $2a + 3b = 2(2m + 1) + 3(2n + 1)$
 $= 4m + 2 + 6n + 3$
 $= 2(2m + 1 + 3n + 1) + 1$ ，
 故 $2a + 3b$ 也是奇數。
4. $A = (5a + 8)^2 + 4(5a + 8) + 4$
 $= 25a^2 + 80a + 64 + 20a + 32 + 4$
 $= 25a^2 + 100a + 100$
 $= 25(a^2 + 4a + 4)$
 $\therefore a^2 + 4a + 4$ 為正整數，故 A 是 25 的倍數。

★ 課本類題

1. 在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ACD$ 中，
 $\therefore \overline{AB} = \overline{AC}$ (已知)，
 $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \angle ACB = \angle ACD$
 $\angle A = \angle A$ (公用角)，
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$ (ASA 全等性質)，
 故 $\overline{AE} = \overline{AD}$ 。
2. 在 $\triangle AEF$ 與 $\triangle CFE$ 中，連接 \overline{AF} 、 \overline{EC} ，
 $\therefore \overline{AE} = \overline{CF}$ (底邊上的高)，
 $\angle AEF = \angle CFE = 90^\circ$ (已知)，
 $\overline{EF} = \overline{EF}$ (公用邊)，
 $\therefore \triangle AEF \cong \triangle CFE$ (SAS 全等性質)，
 故 $\overline{AF} = \overline{EC}$ 。
3. 108
4. $\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
 已知 $a > 0, b < 0, \therefore a - b > 0$ ，
 又 $|b| > |a|, \therefore a + b < 0$ ，
 故 $(a - b)(a + b) < 0$ ，
 即 $a^2 - b^2 < 0$
 $a^2 < b^2$

★ 習作類題

1. (1) 連接 \overline{AC} ，
 $\therefore \angle ADC + \angle DAC + \angle DCA = 180^\circ$
 $\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ$
 $\angle ADC + \angle DAC + \angle DCA$
 $= \angle ABC + \angle BAC + \angle BCA$
 $\angle ABC = \angle ADC + (\angle DAC - \angle BAC) +$
 $(\angle DCA - \angle BCA)$
 $\angle ABC = \angle ADC - \angle BAD - \angle BCD$
- (2) 110°
2. (1) 在 $\triangle ABG$ 與 $\triangle CGD$ 中，
 $\therefore \overline{AG} = \overline{CG}, \overline{BG} = \overline{DG}$
 (G 為 \overline{AC} 、 \overline{BD} 的中點)，
 $\angle AGB = \angle DGC$ (對頂角)，
 $\triangle ABG \cong \triangle CGD$ (SAS 全等性質)，
 故 $\angle A = \angle C$ 。
- (2) 1 : 1

3. 奇數

$\because a$ 為奇數， b 為偶數，

\therefore 設 $a=2m+1$ ， $b=2n$ ， m 、 n 是整數，

$$\begin{aligned}\therefore \text{設 } 3a-2b &= 3(2m+1)-2(2n) \\ &= 6m-3+4n \\ &= 2(3m-2n+1)+1\end{aligned}$$

$\therefore 3m-2n+1$ 為整數，

故 $3a-2b$ 是奇數。

4. $\therefore a^2+1=(2b+7)^2$

$$\begin{aligned}a^2 &= (2b+7)^2-1^2 \\ &= (2b+7+1)(2b+7-1) \\ &= (2b+8)(2b+6) \\ &= 4(b+4)(b+3)\end{aligned}$$

$\therefore (b+4)(b+3)$ 為正整數，

故 a^2 是 4 的倍數。

3-2 三角形的心

★ 課習演練

1. $\frac{169}{4}\pi$

2. 120°

3. 24

4. $\frac{17}{3}$

5. $2:3$

★ 課本類題

1. $\frac{25}{2}$

2. 98°

3. $3:4:5$

4. 24

5. $3\sqrt{2}$

★ 習作類題

1. 6

2. 44°

3. 4

4. 32

5. 20