第 1 章　相似形與三角比

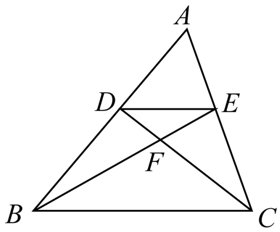
1 連比例的計算（難度★★★★☆）

若 x、y、z 均不為零，且 $8x-y+3z=0$，$4x-3y+z=0$，則：

(1) $x:y:z=$？

(2) $\dfrac{3yz}{2x^2}=$？

2 相似三角形面積比的應用（難度★★★★★）



如圖，△ABC 中，$\overline{DE}$ // $\overline{BC}$ ，$\overline{CD}$ 與 $\overline{BE}$ 相交於 F 點，已知△DEF 面積為 m^2，△CFB 面積為 n^2，$m>0$，$n>0$，則：

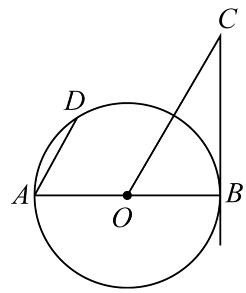
(1) △BFD 面積為何？

(2) △ADE 面積為何？

第 2 章　圓形

1 圓的相關性質（難度★★★★☆）

如圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑，$\overleftrightarrow{BC}$ 為切線，B 為切點，D 為圓上一點，連接 $\overline{OC}$，$\overline{AD} // \overline{OC}$，回答下列問題：

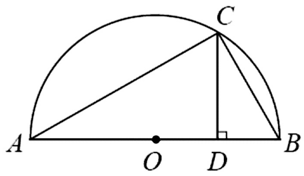


(1) 若易辰連接 $\overline{CD}$，請以文字或數學式說明 $\overline{BC} = \overline{CD}$。

(2) 若 $\overline{AB} = 12$，求 $\overline{AD} \times \overline{OC}$ 的值。

2 半圓的相關性質（難度★★★★☆）

如圖，$\overline{AB}$ 為半圓 O 的直徑，C 點為半圓上一點，$\overline{CD} \perp \overline{AB}$，$\overline{OD}=\overline{BD}$，已知$\triangle BCD$ 面積為 $12\sqrt{3}$，則：



(1) $\triangle ABC$ 面積為何？

(2) $\overline{AC}$ 的長為何？

第 3 章　推理證明與三角形的心

1 幾何全等推理（難度★★★★★）

如圖，正方形 $ABCD$ 中，E 點為 $\overline{CD}$ 的中點，
F 點為 $\overline{BC}$ 上一點，使得 $\angle DAF = \angle AFE$，
已知 $\overline{CF} = k\overline{BC}$，則 k 值為多少？

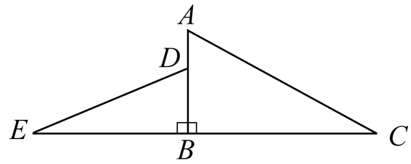
2 外心與內心（難度★★★★☆）

如圖，$\triangle ABC$ 與$\triangle DBE$ 中，$\angle ABC=\angle DBE=90°$，

$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=15$，$\overline{DB}=5$，$\overline{BE}=12$，回答下列問題：

(1) 若 O_1、O_2 分別為$\triangle ABC$ 與$\triangle DBE$ 的外心，求$\overline{O_1O_2}$。

(2) 若 I_1、I_2 分別為$\triangle ABC$ 與$\triangle DBE$ 的內心，求$\overline{I_1I_2}$。



第 1 章 相似形與三角比

1.

(1)$\begin{cases} 8x-y=-3z & \cdots\cdots ① \\ 4x-3y=-z & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①式－②式×2 得 $5y=-z$

$$y=-\frac{1}{5}z$$

代入①式得 $8x+\frac{1}{5}z=-3z$

$$x=-\frac{2}{5}z$$

$\therefore x:y:z=\left(-\frac{2}{5}z\right):\left(-\frac{1}{5}z\right):z$

$=2:1:(-5)$

(2)令 $x=2r$，$y=r$，$z=-5r$，$r\neq0$。

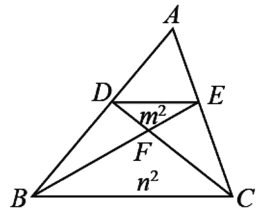
$$\frac{3yz}{2x^2}=\frac{3\times r\times(-5r)}{2\times(2r)^2}$$

$$=\frac{-15r^2}{8r^2}$$

$$=\frac{-15}{8}$$

2.

(1)



$\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$，

$\therefore\triangle DEF\sim\triangle CFB$（$AA$ 相似性質），

$\triangle DEF$ 面積：$\triangle CFB$ 面積$=\overline{DE}^2:\overline{BC}^2$

$m^2:n^2=\overline{DE}^2:\overline{BC}^2$

$\overline{DE}:\overline{BC}=m:n$

又$\triangle DEF$ 面積：$\triangle BFD$ 面積

$=\overline{BF}:\overline{EF}=\overline{DE}:\overline{BC}$

$m^2:\triangle BFD$ 面積$=m:n$

$m^2n=m\times\triangle BFD$ 面積

$\triangle BFD$ 面積$=mn$

(2) 同理，$\triangle CEF$ 面積$=mn$，

$\because\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$，

$\therefore\triangle ADE\sim\triangle ABC$（$AA$ 相似性質），

設$\triangle ADE$ 面積爲 x，

$\triangle ADE$ 面積：$\triangle ABC$ 面積$=\overline{DE}^2:\overline{BC}^2$

$x:(x+m^2+2mn+n^2)=m^2:n^2$

$n^2x=m^2x+m^2(m^2+2mn+n^2)$

$(n^2-m^2)x=m^2(m+n)^2$

$$x=\frac{m^2(m+n)^2}{n^2-m^2}$$

$$=\frac{m^2(m+n)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+m)}(n-m)}$$

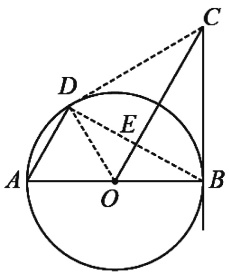
$$=\frac{m^2(m+n)}{n-m}$$

故$\triangle ADE$ 面積爲$\frac{m^2(m+n)}{n-m}$。

第 2 章　圓形

1.

(1) 連接 $\overline{CD}$、$\overline{BD}$、$\overline{OD}$，



$\because \overline{AB}$ 為直徑，

$\therefore \angle ADB = 90°$，

又 $\overline{AD} // \overline{OC}$，

$\therefore \angle OEB = \angle ADB = 90°$，

且 $\overline{OD} = \overline{OB}$，

$\therefore \overleftrightarrow{OC}$ 為 $\overline{BD}$ 的中垂線，

故 $\overline{BC} = \overline{CD}$。

(2) $\because \overline{AD} // \overline{OC}$，

$\therefore \angle BOC = \angle DAB$，

在 $\triangle OBC$ 與 $\triangle ADB$ 中，

$\because \angle OBC = \angle ADB = 90°$，

$\angle BOC = \angle DAB$，

$\therefore \triangle OBC \sim \triangle ADB$（$AA$ 相似性質），

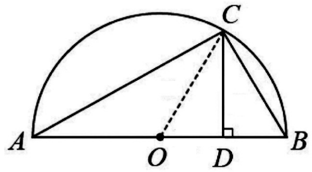
則 $\overline{OB} : \overline{AD} = \overline{OC} : \overline{AB}$

$6 : \overline{AD} = \overline{OC} : 12$

$\overline{AD} \times \overline{OC} = 72$

2.

(1)



連接 $\overline{OC}$，

$\because \overline{OD} = \overline{BD}$，

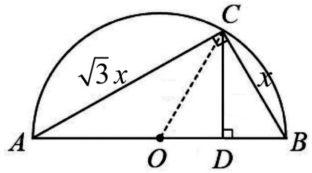
$\therefore \triangle BCD$ 面積 $= \triangle OCD$ 面積 $= 12\sqrt{3}$

又 $\overline{OA} = \overline{OB}$，

$\therefore \triangle AOC$ 面積 $= \triangle BOC$ 面積 $= 24\sqrt{3}$

故 $\triangle ABC$ 面積 $= 24\sqrt{3} \times 2 = 48\sqrt{3}$。

(2)



$\because \overline{OD} = \overline{BD}$ 且 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overline{OC} = \overline{CB} = \overline{OB} = \dfrac{1}{2}\overline{AB}$

又 C 點為半圓上一點，因此 $\angle ACB = 90°$，

故可得 $\triangle ABC$ 為 30°-60°-90°直角三角形。

設 $\overline{CB} = x$，則 $\overline{AC} = \sqrt{3}x$

$\triangle ABC$ 面積 $= 48\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{2} \times x \times \sqrt{3}x = 48\sqrt{3}$

$x^2 = 96$

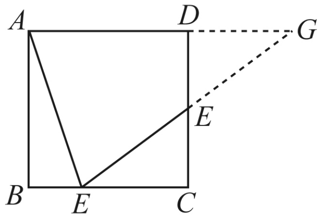
$x = 4\sqrt{6}$

$\overline{AC} = \sqrt{3}x = \sqrt{3} \times 4\sqrt{6} = 4\sqrt{18} = 12\sqrt{2}$

第 3 章 推理證明與三角形的心

1.

(1)



延長 $\overline{EF}$ 交 $\overline{AD}$ 的延長線於 G 點，

在 $\triangle DEG$ 與 $\triangle CEF$ 中，

$\because \overline{DE} = \overline{CE}$，

$\angle EDG = \angle ECF = 90°$，

$\angle DEG = \angle CEF$，

$\therefore \triangle DEG \cong \triangle CEF$（$ASA$ 全等性質），

則 $\overline{DG} = \overline{CF}$，$\overline{EG} = \overline{EF}$，

又 $\angle DAF = \angle AFE$，

$\therefore \overline{GA} = \overline{GF}$。

(2) 設正方形的邊長為 a，

則 $\overline{DG} = \overline{CF} = k\overline{BC} = ka$，

則 $\overline{DE} = \overline{CE} = \dfrac{1}{2}a$，

又 $\overline{GA} = \overline{GF} = 2\overline{EF}$

$\therefore \overline{GA}^2 = 4\overline{EF}^2$

$(\overline{AD} + \overline{DG})^2 = 4(\overline{CE}^2 + \overline{CF}^2)$

$(a + ka)^2 = 4[(\dfrac{1}{2}a)^2 + (ka)^2]$

$a^2 + 2ka^2 + k^2a^2 = a^2 + 4k^2a^2$

$a^2(1 + 2k + k^2) = a^2(1 + 4k^2)$

$1 + 2k + k^2 = 1 + 4k^2$

$3k^2 - 2k = 0$

$k(3k - 2) = 0$

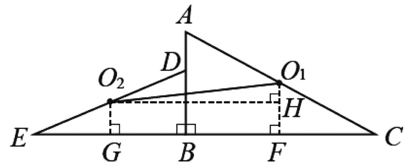
$k = 0$ 或 $\dfrac{2}{3}$（0 不合）。

2.

$\overline{AC} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$，

$\overline{DE} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$，

(1)



連接 $\overline{O_1O_2}$，

作 $\overline{O_1F} \perp \overline{BC}$，$\overline{O_2G} \perp \overline{BE}$，$\overline{O_2H} \perp \overline{O_1F}$，

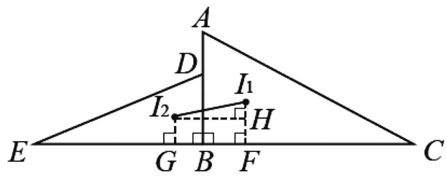
$\overline{O_1F} = 4$，$\overline{O_2G} = \dfrac{5}{2}$，

$\overline{O_1H} = 4 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{3}{2}$，

$\overline{O_2H} = \dfrac{12+15}{2} = \dfrac{27}{2}$，

$\overline{O_1O_2} = \sqrt{(\dfrac{3}{2})^2 + (\dfrac{27}{2})^2} = \sqrt{\dfrac{738}{4}} = \dfrac{3\sqrt{82}}{2}$。

(2)



連接 $\overline{I_1I_2}$，

作 $\overline{I_1F} \perp \overline{BC}$，$\overline{I_2G} \perp \overline{BE}$，$\overline{I_2H} \perp \overline{I_1F}$，

$\overline{I_1F} = \dfrac{8+15-17}{2} = 3$，

$\overline{I_2G} = \dfrac{5+12-13}{2} = 2$，

$\overline{I_1H} = 3 - 2 = 1$，

$\overline{I_2H} = 2 + 3 = 5$，

$\overline{I_1I_2} = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$。

memo

筆記欄