

第 1 章 相似形與三角比

1 連比例的計算 (難度★★★★☆)

若 x 、 y 、 z 均不為零，且 $8x - y + 3z = 0$ ， $4x - 3y + z = 0$ ，則：

(1) $x : y : z = ?$

(2) $\frac{3yz}{2x^2} = ?$

$$(1) \begin{cases} 8x - y = -3z & \dots\dots ① \\ 4x - 3y = -z & \dots\dots ② \end{cases}$$

①式－②式 $\times 2$ 得 $5y = -z$ ， $y = -\frac{1}{5}z$

代入①式得 $8x + \frac{1}{5}z = -3z$ ， $x = -\frac{2}{5}z$

$$\therefore x : y : z = \left(-\frac{2}{5}z\right) : \left(-\frac{1}{5}z\right) : z = 2 : 1 : (-5)$$

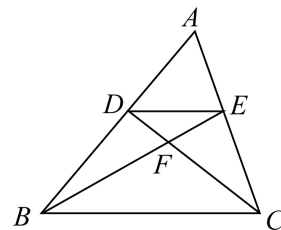
(2) 令 $x = 2r$ ， $y = r$ ， $z = -5r$ ， $r \neq 0$ 。

$$\begin{aligned} \frac{3yz}{2x^2} &= \frac{3 \times r \times (-5r)}{2 \times (2r)^2} \\ &= \frac{-15r^2}{8r^2} \\ &= \frac{-15}{8} \end{aligned}$$



相似三角形面積比的應用（難度★★★★★）

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{CD}$ 與 $\overline{BE}$ 相交於 F 點，
已知 $\triangle DEF$ 面積為 m^2 ， $\triangle CFB$ 面積為 n^2 ， $m > 0$ ，
 $n > 0$ ，則：



- (1) $\triangle BFD$ 面積為何？
- (2) $\triangle ADE$ 面積為何？

(1) $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，

$\therefore \triangle DFE \sim \triangle CFB$ (AA 相似性質)，

$\triangle DEF$ 面積： $\triangle CFB$ 面積 = $\overline{DE}^2 : \overline{BC}^2$

$m^2 : n^2 = \overline{DE}^2 : \overline{BC}^2$

$\overline{DE} : \overline{BC} = m : n$

又 $\triangle DEF$ 面積： $\triangle BFD$ 面積 = $\overline{EF} : \overline{BF} = \overline{DE} : \overline{BC}$

$m^2 : \triangle BFD$ 面積 = $m : n$

$m^2 n = m \times \triangle BFD$ 面積

$\triangle BFD$ 面積 = mn

(2) 同理， $\triangle CEF$ 面積 = mn ，

$\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (AA 相似性質)，

設 $\triangle ADE$ 面積為 x ，

$\triangle ADE$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = $\overline{DE}^2 : \overline{BC}^2$

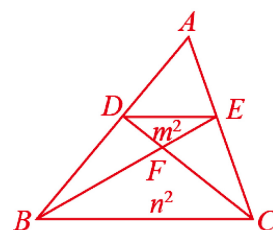
$x : (x + m^2 + 2mn + n^2) = m^2 : n^2$

$n^2 x = m^2 x + m^2 (m^2 + 2mn + n^2)$

$(n^2 - m^2) x = m^2 (m + n)^2$

$x = \frac{m^2 (m + n)^2}{n^2 - m^2} = \frac{m^2 (m + n)^{\cancel{2}}}{(\cancel{n + m} (n - m))} = \frac{m^2 (m + n)}{n - m}$

故 $\triangle ADE$ 面積為 $\frac{m^2 (m + n)}{n - m}$ 。

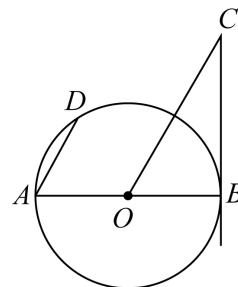


第2章 圓形

1 圓的相關性質 (難度★★★★☆)

如圖， $\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑， $\overline{BC}$ 為切線， B 為切點， D 為圓上一點，連接 $\overline{OC}$ ， $\overline{AD} \parallel \overline{OC}$ ，回答下列問題：

- (1) 若易辰連接 $\overline{CD}$ ，請以文字或數學式說明 $\overline{BC} = \overline{CD}$ 。
 (2) 若 $\overline{AB} = 12$ ，求 $\overline{AD} \times \overline{OC}$ 的值。



- (1) 連接 $\overline{CD}$ 、 $\overline{BD}$ 、 $\overline{OD}$ ，

$\because \overline{AB}$ 為直徑，

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ，

又 $\overline{AD} \parallel \overline{OC}$ ，

$\therefore \angle OEB = \angle ADB = 90^\circ$ ，

且 $\overline{OD} = \overline{OB}$ ，

$\therefore \overline{OC}$ 為 $\overline{BD}$ 的中垂線，

故 $\overline{BC} = \overline{CD}$ 。

- (2) $\because \overline{AD} \parallel \overline{OC}$ ，

$\therefore \angle BOC = \angle DAB$ ，

在 $\triangle OBC$ 與 $\triangle ADB$ 中，

$\because \angle OBC = \angle ADB = 90^\circ$ ，

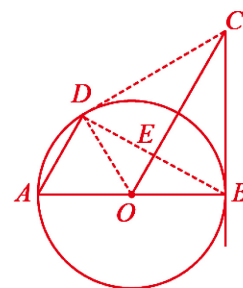
$\angle BOC = \angle DAB$ ，

$\therefore \triangle OBC \sim \triangle ADB$ (AA 相似性質)，

則 $\overline{OB} : \overline{AD} = \overline{OC} : \overline{AB}$

$6 : \overline{AD} = \overline{OC} : 12$

$\overline{AD} \times \overline{OC} = 72$



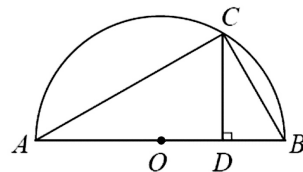


半圓的相關性質（難度★★★★☆）

如圖， $\overline{AB}$ 為半圓 O 的直徑， C 點為半圓上一點， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{OD} = \overline{BD}$ ，已知 $\triangle BCD$ 面積為 $12\sqrt{3}$ ，則：

(1) $\triangle ABC$ 面積為何？

(2) $\overline{AC}$ 的長為何？



(1) 連接 $\overline{OC}$ ，

$$\because \overline{OD} = \overline{BD},$$

$$\therefore \triangle BCD \text{ 面積} = \triangle OCD \text{ 面積} = 12\sqrt{3}$$

$$\text{又 } \overline{OA} = \overline{OB},$$

$$\therefore \triangle AOC \text{ 面積} = \triangle BOC \text{ 面積} = 24\sqrt{3}$$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 面積} = 24\sqrt{3} \times 2 = 48\sqrt{3}。$$

(2) $\because \overline{OD} = \overline{BD}$ 且 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

$$\therefore \overline{OC} = \overline{CB} = \overline{OB} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

又 C 點為半圓上一點，因此 $\angle ACB = 90^\circ$ ，

故可得 $\triangle ABC$ 為 30° - 60° - 90° 直角三角形。

設 $\overline{CB} = x$ ，則 $\overline{AC} = \sqrt{3}x$

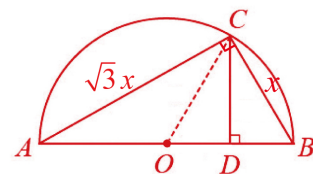
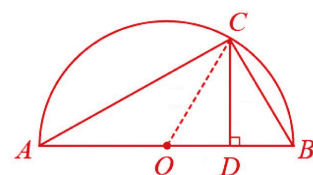
$$\triangle ABC \text{ 面積} = 48\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \times x \times \sqrt{3}x = 48\sqrt{3}$$

$$x^2 = 96$$

$$x = 4\sqrt{6}$$

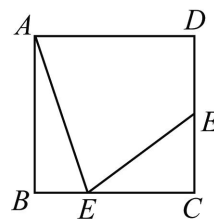
$$\overline{AC} = \sqrt{3}x = \sqrt{3} \times 4\sqrt{6} = 4\sqrt{18} = 12\sqrt{2}$$



第3章 推理證明與三角形的心

1 幾何全等推理（難度★★★★★）

如圖，正方形 $ABCD$ 中， E 點為 $\overline{CD}$ 的中點，
 F 點為 $\overline{BC}$ 上一點，使得 $\angle DAF = \angle AFE$ ，
 已知 $\overline{CF} = k\overline{BC}$ ，則 k 值為多少？



(1) 延長 $\overline{EF}$ 交 $\overline{AD}$ 的延長線於 G 點，

在 $\triangle DEG$ 與 $\triangle CEF$ 中，

$$\because \overline{DE} = \overline{CE},$$

$$\angle EDG = \angle ECF = 90^\circ,$$

$$\angle DEG = \angle CEF,$$

$$\therefore \triangle DEG \cong \triangle CEF \text{ (ASA 全等性質)},$$

$$\text{則 } \overline{DG} = \overline{CF}, \overline{EG} = \overline{EF},$$

$$\text{又 } \angle DAF = \angle AFE,$$

$$\therefore \overline{GA} = \overline{GF}.$$

(2) 設正方形的邊長為 a ，

$$\text{則 } \overline{DG} = \overline{CF} = k\overline{BC} = ka,$$

$$\overline{DE} = \overline{CE} = \frac{1}{2}a,$$

$$\text{又 } \overline{GA} = \overline{GF} = 2\overline{EF}$$

$$\therefore \overline{GA}^2 = 4\overline{EF}^2$$

$$(\overline{AD} + \overline{DG})^2 = 4(\overline{CE}^2 + \overline{CF}^2)$$

$$(a + ka)^2 = 4\left[\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (ka)^2\right]$$

$$a^2 + 2ka^2 + k^2a^2 = a^2 + 4k^2a^2$$

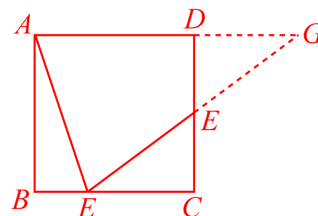
$$a^2(1 + 2k + k^2) = a^2(1 + 4k^2)$$

$$1 + 2k + k^2 = 1 + 4k^2$$

$$3k^2 - 2k = 0$$

$$k(3k - 2) = 0$$

$$k = 0 \text{ 或 } \frac{2}{3} \text{ (0 不合).}$$





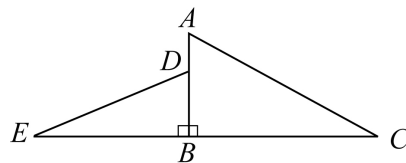
外心與內心 (難度★★★★☆)

如圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBE$ 中， $\angle ABC = \angle DBE = 90^\circ$ ，

$\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 15$ ， $\overline{DB} = 5$ ， $\overline{BE} = 12$ ，回答下列問題：

(1) 若 O_1 、 O_2 分別為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBE$ 的外心，求 $\overline{O_1O_2}$ 。

(2) 若 I_1 、 I_2 分別為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBE$ 的內心，求 $\overline{I_1I_2}$ 。



$$\overline{AC} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17,$$

$$\overline{DE} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13,$$

(1) 連接 $\overline{O_1O_2}$ ，

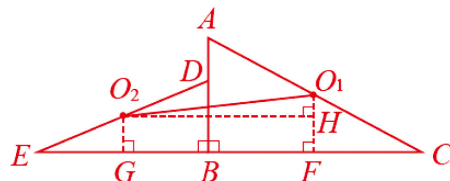
作 $\overline{O_1F} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{O_2G} \perp \overline{BE}$ ， $\overline{O_2H} \perp \overline{O_1F}$ ，

$$\overline{O_1F} = 4, \overline{O_2G} = \frac{5}{2},$$

$$\overline{O_1H} = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\overline{O_2H} = \frac{12+15}{2} = \frac{27}{2},$$

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{27}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{738}{4}} = \frac{3\sqrt{82}}{2}.$$



(2) 連接 $\overline{I_1I_2}$ ，

作 $\overline{I_1F} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{I_2G} \perp \overline{BE}$ ， $\overline{I_2H} \perp \overline{I_1F}$ ，

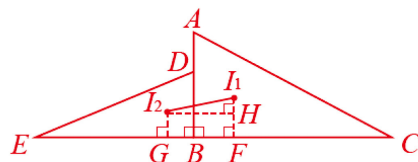
$$\overline{I_1F} = \frac{8+15-17}{2} = 3,$$

$$\overline{I_2G} = \frac{5+12-13}{2} = 2,$$

$$\overline{I_1H} = 3 - 2 = 1,$$

$$\overline{I_2H} = 2 + 3 = 5,$$

$$\overline{I_1I_2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}.$$





第 1 章 相似形與三角比

1.

$$(1) \begin{cases} 8x - y = -3z & \dots\dots ① \\ 4x - 3y = -z & \dots\dots ② \end{cases}$$

①式－②式×2 得 $5y = -z$

$$y = -\frac{1}{5}z$$

代入①式得 $8x + \frac{1}{5}z = -3z$

$$x = -\frac{2}{5}z$$

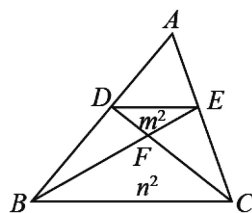
$$\begin{aligned} \therefore x : y : z &= \left(-\frac{2}{5}z\right) : \left(-\frac{1}{5}z\right) : z \\ &= 2 : 1 : (-5) \end{aligned}$$

(2) 令 $x = 2r$, $y = r$, $z = -5r$, $r \neq 0$ 。

$$\begin{aligned} \frac{3yz}{2x^2} &= \frac{3 \times r \times (-5r)}{2 \times (2r)^2} \\ &= \frac{-15r^2}{8r^2} \\ &= \frac{-15}{8} \end{aligned}$$

2.

(1)



$$\overline{DE} \parallel \overline{BC},$$

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle CFB$ (AA 相似性質),

$$\triangle DEF \text{ 面積} : \triangle CFB \text{ 面積} = \overline{DE}^2 : \overline{BC}^2$$

$$m^2 : n^2 = \overline{DE}^2 : \overline{BC}^2$$

$$\overline{DE} : \overline{BC} = m : n$$

又 $\triangle DEF$ 面積 : $\triangle BFD$ 面積

$$= \overline{BF} : \overline{EF} = \overline{DE} : \overline{BC}$$

$$m^2 : \triangle BFD \text{ 面積} = m : n$$

$$m^2 n = m \times \triangle BFD \text{ 面積}$$

$$\triangle BFD \text{ 面積} = mn$$

(2) 同理, $\triangle CEF$ 面積 = mn ,

$$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC},$$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (AA 相似性質),

設 $\triangle ADE$ 面積為 x ,

$$\triangle ADE \text{ 面積} : \triangle ABC \text{ 面積} = \overline{DE}^2 : \overline{BC}^2$$

$$x : (x + m^2 + 2mn + n^2) = m^2 : n^2$$

$$n^2 x = m^2 x + m^2 (m^2 + 2mn + n^2)$$

$$(n^2 - m^2) x = m^2 (m + n)^2$$

$$x = \frac{m^2 (m + n)^2}{n^2 - m^2}$$

$$= \frac{m^2 (m + n)^2}{(n + m)(n - m)}$$

$$= \frac{m^2 (m + n)}{n - m}$$

故 $\triangle ADE$ 面積為 $\frac{m^2 (m + n)}{n - m}$ 。

第 2 章 圓形

1.

(1) 連接 $\overline{CD}$ 、 $\overline{BD}$ 、 $\overline{OD}$ ，

$\because \overline{AB}$ 為直徑，

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ，

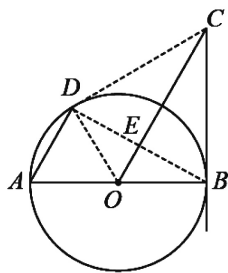
又 $\overline{AD} \parallel \overline{OC}$ ，

$\therefore \angle OEB = \angle ADB = 90^\circ$ ，

且 $\overline{OD} = \overline{OB}$ ，

$\therefore \overline{OC}$ 為 $\overline{BD}$ 的中垂線，

故 $\overline{BC} = \overline{CD}$ 。



(2) $\because \overline{AD} \parallel \overline{OC}$ ，

$\therefore \angle BOC = \angle DAB$ ，

在 $\triangle OBC$ 與 $\triangle ADB$ 中，

$\because \angle OBC = \angle ADB = 90^\circ$ ，

$\angle BOC = \angle DAB$ ，

$\therefore \triangle OBC \sim \triangle ADB$ (AA 相似性質)，

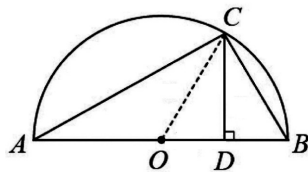
則 $\overline{OB} : \overline{AD} = \overline{OC} : \overline{AB}$

$6 : \overline{AD} = \overline{OC} : 12$

$\overline{AD} \times \overline{OC} = 72$

2.

(1)



連接 $\overline{OC}$ ，

$\because \overline{OD} = \overline{BD}$ ，

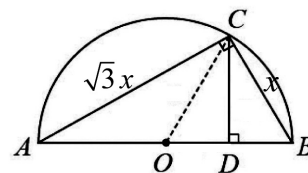
$\therefore \triangle BCD$ 面積 = $\triangle OCD$ 面積 = $12\sqrt{3}$

又 $\overline{OA} = \overline{OB}$ ，

$\therefore \triangle AOC$ 面積 = $\triangle BOC$ 面積 = $24\sqrt{3}$

故 $\triangle ABC$ 面積 = $24\sqrt{3} \times 2 = 48\sqrt{3}$ 。

(2)



$\because \overline{OD} = \overline{BD}$ 且 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overline{OC} = \overline{CB} = \overline{OB} = \frac{1}{2} \overline{AB}$

又 C 點為半圓上一點，因此 $\angle ACB = 90^\circ$ ，

故可得 $\triangle ABC$ 為 30° - 60° - 90° 直角三角形。

設 $\overline{CB} = x$ ，則 $\overline{AC} = \sqrt{3}x$

$\triangle ABC$ 面積 = $48\sqrt{3}$

$\frac{1}{2} \times x \times \sqrt{3}x = 48\sqrt{3}$

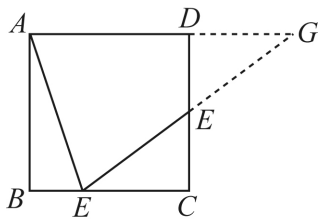
$x^2 = 96$

$x = 4\sqrt{6}$

$\overline{AC} = \sqrt{3}x = \sqrt{3} \times 4\sqrt{6} = 4\sqrt{18} = 12\sqrt{2}$

第3章 推理證明與三角形的心

1.
(1)



延長 $\overline{EF}$ 交 $\overline{AD}$ 的延長線於 G 點，
在 $\triangle DEG$ 與 $\triangle CEF$ 中，
 $\therefore \overline{DE} = \overline{CE}$ ，
 $\angle EDG = \angle ECF = 90^\circ$ ，
 $\angle DEG = \angle CEF$ ，
 $\therefore \triangle DEG \cong \triangle CEF$ (ASA 全等性質)，
則 $\overline{DG} = \overline{CF}$ ， $\overline{EG} = \overline{EF}$ ，
又 $\angle DAF = \angle AFE$ ，
 $\therefore \overline{GA} = \overline{GF}$ 。

(2) 設正方形的邊長為 a ，

則 $\overline{DG} = \overline{CF} = k\overline{BC} = ka$ ，

則 $\overline{DE} = \overline{CE} = \frac{1}{2}a$ ，

又 $\overline{GA} = \overline{GF} = 2\overline{EF}$

$\therefore \overline{GA}^2 = 4\overline{EF}^2$

$$(\overline{AD} + \overline{DG})^2 = 4(\overline{CE}^2 + \overline{CF}^2)$$

$$(a + ka)^2 = 4\left[\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (ka)^2\right]$$

$$a^2 + 2ka^2 + k^2a^2 = a^2 + 4k^2a^2$$

$$a^2(1 + 2k + k^2) = a^2(1 + 4k^2)$$

$$1 + 2k + k^2 = 1 + 4k^2$$

$$3k^2 - 2k = 0$$

$$k(3k - 2) = 0$$

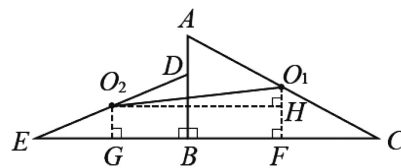
$$k = 0 \text{ 或 } \frac{2}{3} \text{ (0 不合)}。$$

2.

$$\overline{AC} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17，$$

$$\overline{DE} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13，$$

(1)



連接 $\overline{O_1O_2}$ ，

作 $\overline{O_1F} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{O_2G} \perp \overline{BE}$ ， $\overline{O_2H} \perp \overline{O_1F}$ ，

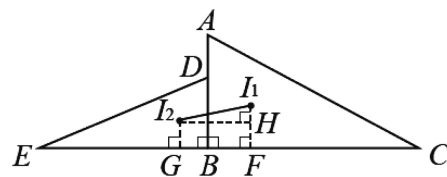
$$\overline{O_1F} = 4，\overline{O_2G} = \frac{5}{2}，$$

$$\overline{O_1H} = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}，$$

$$\overline{O_2H} = \frac{12 + 15}{2} = \frac{27}{2}，$$

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{27}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{738}{4}} = \frac{3\sqrt{82}}{2}。$$

(2)



連接 $\overline{I_1I_2}$ ，

作 $\overline{I_1F} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{I_2G} \perp \overline{BE}$ ， $\overline{I_2H} \perp \overline{I_1F}$ ，

$$\overline{I_1F} = \frac{8 + 15 - 17}{2} = 3，$$

$$\overline{I_2G} = \frac{5 + 12 - 13}{2} = 2，$$

$$\overline{I_1H} = 3 - 2 = 1，$$

$$\overline{I_2H} = 2 + 3 = 5，$$

$$\overline{I_1I_2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}。$$



memo

筆記欄

