1-1 連比

1. 求連比

1. 若 a、b、c 三數的比記為 $a:b:c$，且 $m\neq 0$，則
   (1) $a:b:c=ma:mb:mc$。　(2) $a:b:c=\dfrac{a}{m}:\dfrac{b}{m}:\dfrac{c}{m}$
2. 由 $x:y$、$y:z$、$x:z$ 中的任意兩個比，可求出 $x:y:z$。

即時演練

1. 將下列各小題化爲最簡整數比。
   (1) $28:49:77$　(2) $0.9:1.5:3.6$
   (1) $4:7:11$　(2) $3:5:12$

2. 已知 $x:y=2:3$，$x:z=2:5$，求 $x:y:z$。

x	:	y	:	z
2	:	3		
2			:	5
2	:	3	:	5

因此，$x:y:z=2:3:5$。

1 類題　配合課本 P11 例題 1　連比例的運算①　配合課本 P11 隨堂練習　**熟練**

已知 $x:y=2:5$，$y:z=4:3$，求 $x:y:z$。

解

因爲〔5, 4〕=20，

所以 $x:y=2:5=8:20$

$y:z=4:3=20:15$

因此 $x:y:z=8:20:15$。

已知 $x:y=5:6$，$x:z=3:2$，求 $x:y:z$。

解

x	:	y	:	z
5	:	6		
3	:		:	2
15	:	18	:	10

因此 $x:y:z=15:18:10$。

2類題 配合課本 P12 例題 2　連比例的運算②　配合課本 P12 隨堂練習　熟練

已知 $x:y=\frac{3}{4}:2$，$y:z=3:2$，求 $x:y:z$。

解

$x:y=\left(\frac{3}{4}\times4\right):(2\times4)=3:8$

x	:	y	:	z
3	:	8		
		3	:	2
9	:	24	:	16

因此 $x:y:z=9:24:16$。

已知 $x:z=2:1$，$y:z=0.4:0.5$，求 $x:y:z$。

解

$y:z=(0.4\times10):(0.5\times10)=4:5$

x	:	y	:	z
2	:			1
		4	:	5
10	:	4	:	5

因此 $x:y:z=10:4:5$。

3類題 配合課本 P13 例題 3　連比例的運算③　配合課本 P13 隨堂練習　熟練

已知 x、y、z 皆不等於 0，且 $x=3y$，$2x=3z$，求 $x:y:z$。

解

由 $x=3y$，可得 $x:y=3:1$，
由 $2x=3z$，可得 $x:z=3:2$，

x	:	y	:	z
3	:	1		
3			:	2
3	:	1	:	2

因此 $x:y:z=3:1:2$。

1. 已知 x、y、z 皆不等於 0，且 $2x-5y=0$，$3y=8z$，求 $x:y:z$。
2. 已知 x、y、z 皆不等於 0，且 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$，$6x=5z$，求 $x:y:z$。

解

1. 由 $2x-5y=0$，得 $2x=5y$，$x:y=5:2$，
   由 $3y=8z$，得 $y:z=8:3$，

x	:	y	:	z
5	:	2		
		8	:	3
20	:	8	:	3

   因此 $x:y:z=20:8:3$。

2. 由 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$，得 $x:y=3:4$，
   由 $6x=5z$，得 $x:z=5:6$，

x	:	y	:	z
3	:	4		
5			:	6
15	:	20	:	18

   因此 $x:y:z=15:20:18$。

2. 連比例式的應用

已知 a、b、c 皆不等於 0，則下列三者有相同的意義。

(1) $x:y:z=a:b:c$　(2) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$　(3) $x=ar$，$y=br$，$z=cr$（$r\neq0$）

1 類題　配合課本 P15 例題 4　連比例式的運算　配合課本 P15 隨堂練習　熟練

如果 $x:y:z=3:4:5$，且 $2x+y-z=30$，求 x、y、z 的值。

解

由 $x:y:z=3:4:5$，

設 $x=3r$，$y=4r$，$z=5r$，$r\neq0$。

$\because 2x+y-z=30$，

$\therefore 2\times3r+4r-5r=30$

$5r=30$，$r=6$

因此 $x=3\times6=18$，

$y=4\times6=24$，

$z=5\times6=30$。

如果 a、b、c 皆不等於 0，且 $\dfrac{a}{5}=\dfrac{b}{6}=\dfrac{c}{9}$，求 $\dfrac{2b+c}{3a+2c}$ 的值。

解

設 $\dfrac{a}{5}=\dfrac{b}{6}=\dfrac{c}{9}=r$，$r\neq0$，

則 $a=5r$，$b=6r$，$c=9r$。

$\dfrac{2b+c}{3a+2c}=\dfrac{12r+9r}{15r+18r}=\dfrac{21r}{33r}=\dfrac{7}{11}$。

2 類題　配合課本 P16 例題 5　生活中的連比例式①　配合課本 P16 隨堂練習　熟練

已知區公所提供 A、B、C 三款疫苗開放民眾施打，若該區公所共有 1500 個疫苗，且 A、B、C 三款疫苗的數量比爲 $3:7:2$，則區公所提供 B 疫苗的數量爲多少個？

解

設區公所提供 A、B、C 三款疫苗的數量分別爲 $3r$、$7r$、$2r$，$r\neq0$。

依題意可列出 $3r+7r+2r=1500$

$12r=1500$

$r=125$

所以區公所提供 B 疫苗的數量爲 $7\times125=875$（個）。

所謂的「631 存錢法」指的是將收入分成 10 份，其中 6 份用於生活開銷，3 份用於儲蓄，其餘 1 份用於風險規劃。已知安琪的媽媽某月收入爲 64000 元，若媽媽依照「631 存錢法」，則該月會將多少錢用在生活開銷？

解

設媽媽該月的生活開銷、儲蓄及風險規劃分別爲 $6r$、$3r$、r 元，$r\neq0$。

依題意可列出 $6r+3r+r=64000$

$10r=64000$

$r=6400$

所以媽媽該月的生活開銷爲 $6\times6400=38400$（元）。

3類題　配合課本 P17 例題 6　生活中的連比例式②　配合課本 P17 隨堂練習　熟練

有甲、乙、丙三臺機器，甲、乙兩臺機器每天的產量比是 6：7；乙、丙兩臺機器每天的產量比是 2：3，回答下列問題：

(1)甲、乙、丙三臺機器每天的產量比是多少？

(2)已知 A 工廠有甲、乙兩臺機器，B 工廠有乙、丙兩臺機器，C 工廠有甲、丙兩臺機器，在機器皆正常運作的情形下，這三間工廠每天的產量比是多少？

解

(1)設甲、乙、丙三臺機器每天的生產量分別是 x、y、z，

x	：	y	：	z
6	：	7		
		2	：	3
12	：	14	：	21

因此，這三臺機器每天的產量比是 12：14：21。

(2)∵甲、乙、丙三臺機器每天的產量比是 12：14：21，

∴設 $x=12r$，$y=14r$，$z=21r$，$r\neq 0$。

依題意可列出

$(x+y):(y+z):(x+z)$

$=(12r+14r):(14r+21r):(12r+21r)$

$=26r:35r:33r$

$=26:35:33$

即這三間工廠每天的產量比是 26：35：33。

已知良心文具店每本手帳本與每支原子筆的售價比是 9：2，每支原子筆與每本桌曆的售價比是 3：8。若店裡將推出 A、B 兩種禮包，其中 A 禮包內有 2 本手帳本與 5 支原子筆，B 禮包內有 8 支原子筆與 2 本桌曆。若不計其他額外費用，則 A、B 兩種禮包的售價比是多少？

解

設手帳本、原子筆與桌曆的售價分別是 x 元、y 元、z 元，

x	：	y	：	z
9	：	2		
		3	：	8
27	：	6	：	16

因此，手帳本、原子筆與桌曆的售價分別是 x 元、y 元、z 元，

故可設 $x=27r$，$y=6r$，$z=16r$，$r\neq 0$，

依題意可列出 $(2x+5y):(8y+2z)$

$=(54r+30r):(48r+32r)$

$=84r:80r$

$=21:20$

即 A、B 兩種禮包的售價比是 21：20。

4 類題　配合課本 P18 例題 7　連比例的應用　配合課本 P18 隨堂練習　熟練

已知 2 顆綠棗子或 9 顆櫻桃或 16 粒小草莓三者含醣量相等，則 1 顆綠棗子、1 顆櫻桃和 1 粒小草莓所含醣量的比是多少？

解

設 1 顆綠棗子、1 顆櫻桃和 1 粒小草莓所含醣量分別是 x 單位、y 單位、z 單位。

依題意可以列式得 $2x=9y=16z$，

由 $2x=9y$，得 $x:y=9:2$；

由 $9y=16z$，得 $y:z=16:9$。

$$\begin{array}{ccccc} x & : & y & : & z \\ 9 & : & \boxed{2} & & \\ & & \boxed{16} & : & 9 \\ \hline 72 & : & \boxed{16} & : & 9 \end{array}$$

因此 $x:y:z=72:16:9$，

所以 1 顆綠棗子、1 顆櫻桃和 1 粒小草莓所含醣量的比是 $72:16:9$。

已知 x、y、z 皆不等於 0，且 $4x=6y=9z$，求 $x:y:z$。

解

由 $4x=6y$，得 $x:y=6:4$；

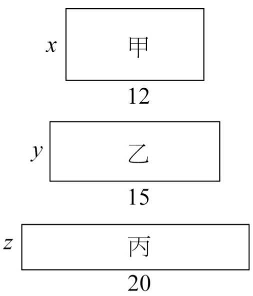
由 $6y=9z$，得 $y:z=9:6$。

$$\begin{array}{ccccc} x & : & y & : & z \\ 6 & : & \boxed{4} & & \\ & & \boxed{9} & : & 6 \\ \hline 54 & : & \boxed{36} & : & 24 \end{array}$$

因此 $x:y:z=54:36:24=9:6:4$。

5 類題　配合課本 P19 例題 8　連比例的幾何問題　配合課本 P19 隨堂練習　熟練

如圖，甲、乙、丙三人皆畫出面積相等的長方形，已知三人分別以 12 公分，15 公分與 20 公分作爲長方形的長，且長方形的寬分別依序爲 x 公分，y 公分，與 z 公分，求 $x:y:z$。



解

因爲三人所畫的長方形面積相等，所以設三人所畫的長方形面積皆爲 A 平方公分。

則 $12x=15y=20z=A$

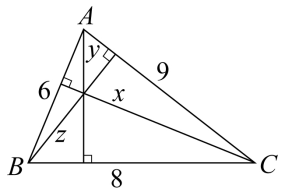
可得 $12x=A$，$15y=A$，$20z=A$，

因此 $x=\dfrac{A}{12}$，$y=\dfrac{A}{15}$，$z=\dfrac{A}{20}$，

$$x:y:z=\frac{A}{12}:\frac{A}{15}:\frac{A}{20}$$

$$=\frac{1}{12}:\frac{1}{15}:\frac{1}{20}=5:4:3$$

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=8$，$\overline{AC}=9$，如果此三角形三邊的對應高依序分別爲 x、y、z，求 $x:y:z$。



解

設三角形的面積爲 A，

則 $\dfrac{6x}{2}=\dfrac{8y}{2}=\dfrac{9z}{2}=A$，

可得 $\dfrac{6x}{2}=A$，$\dfrac{8y}{2}=A$，$\dfrac{9z}{2}=A$，

因此 $x=\dfrac{2A}{6}$，$y=\dfrac{2A}{8}$，$z=\dfrac{2A}{9}$，

$$x:y:z=\frac{2A}{6}:\frac{2A}{8}:\frac{2A}{9}$$

$$=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{2}{9}$$

$$=12:9:8$$

1-1 自我磨練

配合課本 **P21～23** 自我評量

1. 求下列各題的連比：

(1) $x:y=3:2$，$y:z=6:7$，則 $x:y:z=$ ___9：6：7___。

(2) $x:y=0.4:0.9$，$x:z=6:5$，則 $x:y:z=$ ___12：27：10___。

(3) $x:z=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}$，$y:z=4:3$，則 $x:y:z=$ ___9：8：6___。

2. 已知 a、b、c 皆不等於 0，且 $3a=5b$，$3b=8c$，求 $a:b:c$。

由 $3a=5b$，得 $a:b=5:3$，

由 $3b=8c$，得 $b:c=8:3$。

$$\begin{array}{ccccc} a & : & b & : & c \\ 5 & : & 3 & & \\ & & 8 & : & 3 \\ \hline 40 & : & 24 & : & 9 \end{array}$$

所以 $a:b:c=40:24:9$。

3. 家庭中有哥哥、弟弟和妹妹三個小孩，其中哥哥和弟弟的體重比爲 9：8，哥哥和妹妹的體重比爲 4：1，若弟弟和妹妹的體重相差 46 公斤，則弟弟的體重爲多少公斤？

設哥哥、弟弟和妹妹三人的體重分別爲 x 公斤、y 公斤、z 公斤，

即 $x:y=9:8$，$x:z=4:1$，

$$\begin{array}{ccccc} x & : & y & : & z \\ 9 & : & 8 & & \\ 4 & & & : & 1 \\ \hline 36 & : & 32 & : & 9 \end{array}$$

因此 $x:y:z=36:32:9$。

設 $a=36r$，$b=32r$，$c=9r$，$r\neq 0$。

依題意可知 $32r-9r=46$，$r=2$，

即弟弟的體重爲 $32\times 2=64$（公斤）。

4. 若 $\frac{x}{6}=\frac{y}{9}=\frac{z}{10}$，且 $x+5y-3z=84$，求 y 的值。

設 $\frac{x}{6}=\frac{y}{9}=\frac{z}{10}=k$，$k\neq0$，

則 $x=6k$，$y=9k$，$z=10k$，

$6k+45k-30k=84$

$21k=84$

$k=4$

所以 $y=9\times4=36$。

5. 有一個三角形，其周長是 112 公分，且三邊長分別為 x 公分、y 公分、z 公分，如果 $2x:3y=10:9$，$3x:4z=5:8$，求 x、y、z 之值。

由 $2x:3y=10:9$，$x:y=5:3$

由 $3x:4z=5:8$，$x:z=5:6$

x	:	y	:	z
5	:	3		
5			:	6
5	:	3	:	6

所以 $x:y:z=5:3:6$。

設 $x=5r$，$y=3r$，$z=6r$，其中 $r\neq0$。

$5r+3r+6r=112$

$14r=112$，$r=8$。

因此 $x=5\times8=40$，

$y=3\times8=24$，

$z=6\times8=48$。

6. 已知 x、y、z 皆不等於 0，且 $4x=5y=6z$，則 $x:y:z=$ ___15：12：10___。

設 $4x=5y=6z=A$，$A\neq0$

則 $4x=A$，$x=\frac{A}{4}$；$5y=A$，$y=\frac{A}{5}$；$6z=A$，$z=\frac{A}{6}$

因此 $x:y:z=\frac{A}{4}:\frac{A}{5}:\frac{A}{6}$

$=\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}$

$=(\frac{1}{4}\times60):(\frac{1}{5}\times60):(\frac{1}{6}\times60)$

$=15:12:10$。

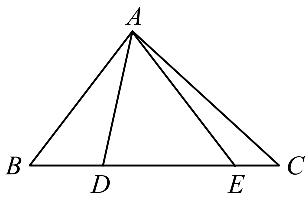
1-2 比例線段

1. 等高三角形

等（同）高三角形的面積比等於其對應底邊長的比。

1 類題 配合課本 P25 例題 1　等高或同高三角形的面積比　配合課本 P25 隨堂練習　熟練

如圖，$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BD}=6$，$\overline{DE}=9$，$\overline{CE}=3$，求：



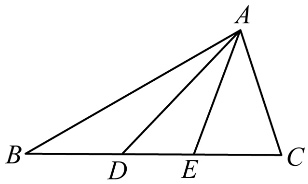
(1) $\triangle ABD$ 與 $\triangle ADE$ 的面積比。
(2) $\triangle ABD$ 與 $\triangle ADC$ 的面積比。

解

(1) $\triangle ABD$ 的面積：$\triangle ADE$ 的面積
$=\overline{BD}:\overline{DE}$
$=6:9$
$=2:3$

(2) $\triangle ABD$ 的面積：$\triangle ADC$ 的面積
$=\overline{BD}:\overline{DC}$
$=6:(9+3)$
$=1:2$

如圖，$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BD}:\overline{DE}:\overline{EC}=5:3:4$，求：



(1) $\triangle ABD$ 的面積：$\triangle ADC$ 的面積。
(2) $\triangle ADC$ 的面積：$\triangle ABC$ 的面積。

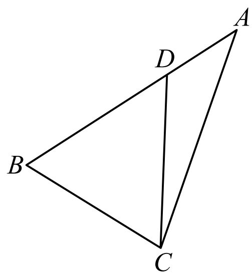
解

(1) $\triangle ABD$ 的面積：$\triangle ADC$ 的面積
$=\overline{BD}:\overline{DC}$
$=5:(3+4)$
$=5:7$

(2) $\triangle ADC$ 的面積：$\triangle ABC$ 的面積
$=\overline{DC}:\overline{BC}$
$=(3+4):(5+3+4)$
$=7:12$

即時演練

如圖，$\triangle ABC$ 中，若 $\triangle ABC$ 面積爲 30，$\triangle BCD$ 的面積爲 20，求：
(1) $\overline{AB}:\overline{AD}$ 的比值。
(2) $\overline{AD}:\overline{BD}$ 的比值。

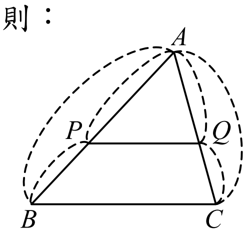


(1) $\triangle ABC$ 的面積：$\triangle ADC$ 的面積 $=\overline{AB}:\overline{AD}=30:(30-20)=3:1$
$\therefore$ 比值爲 3。

(2) $\triangle ADC$ 的面積：$\triangle BDC$ 的面積 $=\overline{AD}:\overline{BD}=(30-20):20=1:2$
$\therefore$ 比值爲 $\frac{1}{2}$。

2. 平行線截比例線段

1. 如圖，$\triangle ABC$ 中，P、Q 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上的一點，若 $\overline{PQ}//\overline{BC}$ ，則：



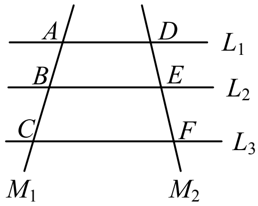
① $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{QC}$ 。

② $\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}$

③ $\overline{PB}:\overline{AB}=\overline{QC}:\overline{AC}$ 。

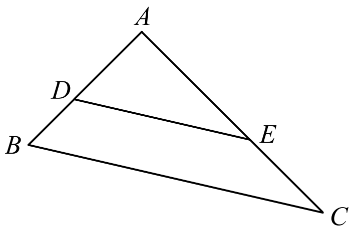
④ $\overline{PQ}:\overline{BC}=\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}$ 。

2. 如圖，直線 $L_1//L_2//L_3$，且分別與截線 M_1 交於 A、B、C 三點，與截線 M_2 交於 D、E、F 三點，則 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$ 。



1 類題 配合課本 P28、29 隨堂練習 **平行線截比例線段性質** 配合課本 P28、29 隨堂練習 **熟練**

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，$\overline{DE}//\overline{BC}$ ，若 $\overline{AD}=15$，$\overline{DB}=10$，$\overline{EC}=16$，求 $\overline{AE}$ 。



解

在 $\triangle ABC$ 中，

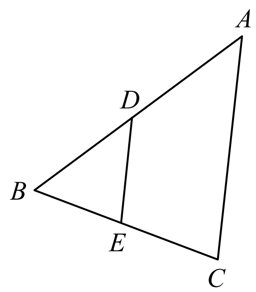
$\because \overline{DE}//\overline{BC}$ ，

$\therefore \overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$

$15:10=\overline{AE}:16$

$\overline{AE}=24$。

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 上，$\overline{DE}//\overline{AC}$ ，若 $\overline{AB}=36$，$\overline{BE}=12$，$\overline{BC}=27$，求 $\overline{BD}$ 。



解

在 $\triangle ABC$ 中，

$\because \overline{DE}//\overline{AC}$ ，

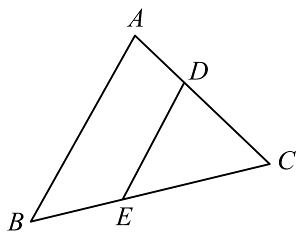
$\therefore \overline{BD}:\overline{BA}=\overline{BE}:\overline{BC}$

$\overline{BD}:36=12:27$

$\overline{BD}=16$。

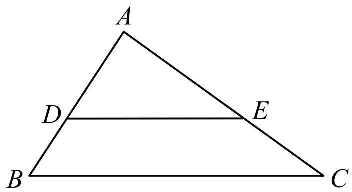
即時演練

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 上，$\overline{DE}//\overline{AB}$ ，若 $\overline{AD}:\overline{AC}=2:5$，$\overline{BE}=8$，則 $\overline{BC}=$ ___20___ 。



2 類題　配合課本 P31 隨堂練習　平行線截比例線段性質的應用　配合課本 P31 隨堂練習　熟練

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，若 $\overline{AD}=12$，$\overline{DB}=8$，$\overline{BC}=30$，求 $\overline{DE}$。



解

在 $\triangle ABC$ 中，

$\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$，

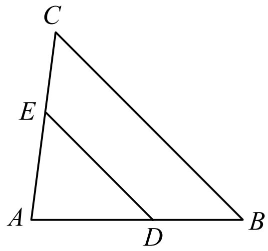
$\therefore \overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$

$12:(12+8)=\overline{DE}:30$

$360=20\overline{DE}$

$\overline{DE}=18$。

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，若 $\overline{AD}=16$，$\overline{DB}=12$，$\overline{DE}=3x+2$，$\overline{BC}=6x-1$，求 x 的值。



解

在 $\triangle ABC$ 中，

$\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$，

$\therefore \overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$

$16:(16+12)=(3x+2):(6x-1)$

$4:7=(3x+2):(6x-1)$

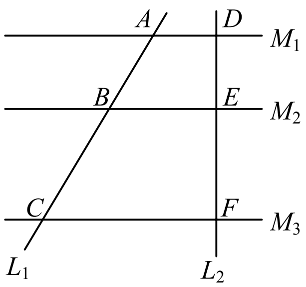
$24x-4=21x+14$

$3x=18$

$x=6$。

3 類題　配合課本 P32 隨堂練習　平行線截比例線段性質的應用　配合課本 P32 隨堂練習　熟練

如圖，直線 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3$，且分別與截線 L_1 交於 A、B、C 三點，與截線 L_2 交於 D、E、F 三點，若 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$，$\overline{DF}=30$，求 $\overline{DE}$ 與 $\overline{EF}$。



解

$\because M_1 \parallel M_2 \parallel M_3$

$\therefore \overline{DE}:\overline{EF}$

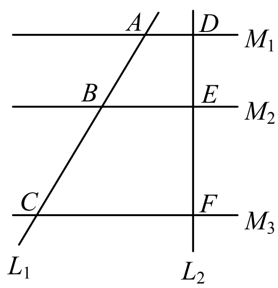
$=\overline{AB}:\overline{BC}$

$=2:3$

$\overline{DE}=30\times\dfrac{2}{2+3}=12$

$\overline{EF}=30\times\dfrac{3}{2+3}=18$

如圖，直線 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3$，且分別與截線 L_1 交於 A、B、C 三點，與截線 L_2 交於 D、E、F 三點，若 $\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=15$，$\overline{DE}=x+5$，$\overline{EF}=3x-3$，求 x 的值。



解

$\because M_1 \parallel M_2 \parallel M_3$，

$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$

$10:15=(x+5):(3x-3)$

$2:3=(x+5):(3x-3)$

$6x-6=3x+15$

$3x=21$

$x=7$

如下圖，已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖，在 $\overline{AB}$ 上找出一點 C，使得 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$。

作法

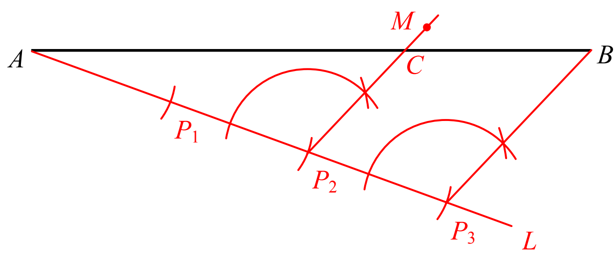
(1)過 A 點作一條異於 $\overline{AB}$ 的直線 L。

(2)在 L 上依序取 $P_1 \sim P_3$ 三點，使得 $\overline{AP_1}=\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}$。

(3)連接 $\overline{P_3B}$。

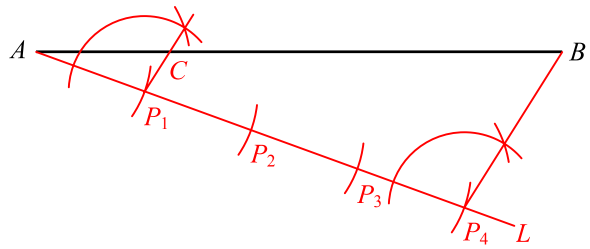
(4)過 P_2 作 $\overrightarrow{P_2M} // \overrightarrow{P_3B}$，使 $\overrightarrow{P_2M}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 C 點，則 C 點即爲所求。

解



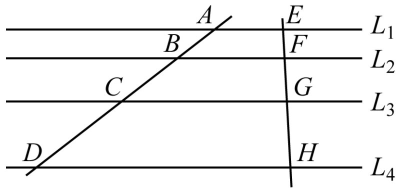
如下圖，已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖，在 $\overline{AB}$ 上找出一點 C，使得 $\overline{AC}:\overline{BC}=1:3$。（不必寫出作法）

解



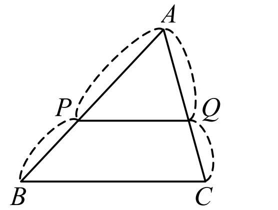
即時演練

如圖，$L_1//L_2//L_3//L_4$，若 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=1:3:5$，$\overline{FG}=15$，則 $\overline{EH}=$ ___45___。

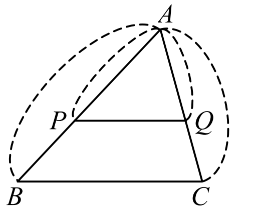


3. 利用比例線段判別平行

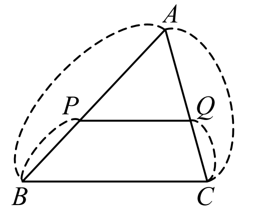
如圖，$\triangle ABC$ 中，P、Q 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，若

① 

$\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{QC}$，
則 $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{BC}$。

② 

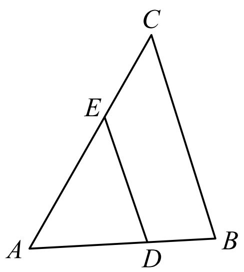
$\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}$，
則 $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{BC}$。

③ 

$\overline{PB}:\overline{AB}=\overline{QC}:\overline{AC}$，
則 $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{BC}$。

1 類題　配合課本 P36 例題 6　由比例線段判別是否平行　配合課本 P36 隨堂練習　**熟練**

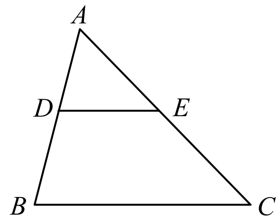
如圖，$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AD}=14$，$\overline{DB}=8$，$\overline{AE}=21$，$\overline{EC}=12$，則 $\overline{DE}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行？爲什麼？



解

在$\triangle ABC$ 中，
$\because\ \overline{AD}:\overline{DB}=14:8=7:4$，
$\quad\overline{AE}:\overline{EC}=21:12=7:4$，
$\therefore\ \overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$。

如圖，$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AD}:\overline{AB}=5:11$，$\overline{AE}=15$，$\overline{AC}=33$，則 $\overline{DE}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行？爲什麼？

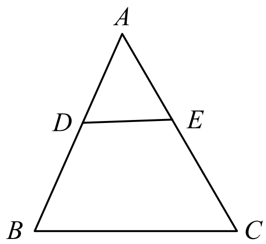


解

在$\triangle ABC$ 中，
$\because\ \overline{AD}:\overline{AB}=5:11$，
$\quad\overline{AE}:\overline{AC}=15:33=5:11$，
$\therefore\ \overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$。

即時演練

如圖，$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=40$，$\overline{DB}=22$，$\overline{AC}=42$，$\overline{EC}=24$，則 $\overline{DE}$ 是否平行於 $\overline{BC}$？爲什麼？



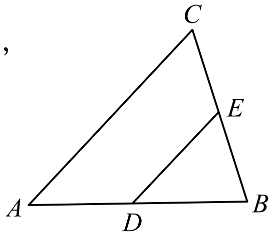
在$\triangle ABC$ 中，
$\because\ \overline{DB}:\overline{AB}=22:40=11:20$，
$\quad\overline{EC}:\overline{AC}=24:42=12:21$，
$\therefore\ \overline{DE}$ 和 $\overline{BC}$ 不平行。

4. 三角形兩邊中點連線段性質

三角形的兩邊中點連線必平行於第三邊，且長度為第三邊長的一半。

1 類題 配合課本 P38 例題 7　三角形兩邊中點連線性質　配合課本 P38 隨堂練習 **熟練**

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的中點，若 $\overline{DE}=16$，求 $\overline{AC}$。



解

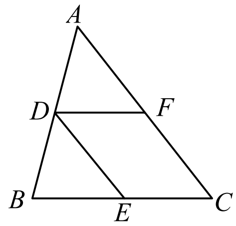
在 $\triangle ABC$ 中，

$\because D$、E 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的中點，

$\therefore \overline{DE}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$，

故 $\overline{AC}=2\overline{DE}=2\times16=32$。

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E、F 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的中點，若 $\overline{AC}=28$，$\overline{BC}=24$，回答下列問題：



(1) 四邊形 $DECF$ 是否爲平行四邊形？爲什麼？

(2) 四邊形 $DECF$ 的周長爲多少？

解

(1) $\because D$、E、F 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的中點，

$\therefore \overline{DF} /\!/ \overline{BC}$，$\overline{DE} /\!/ \overline{AC}$，

在四邊形 $DECF$ 中，

$\because \overline{DF} /\!/ \overline{BC}$，$\overline{DE} /\!/ \overline{AC}$，

$\therefore$ 四邊形 $DECF$ 爲平行四邊形。

(2) $\overline{EC}=\overline{DF}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times24=12$，

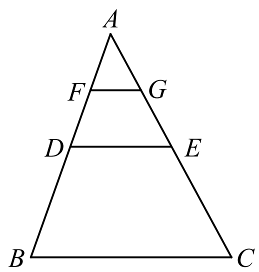
$\overline{FC}=\overline{DE}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times28=14$，

故四邊形 $DECF$ 的周長爲

$(12+14)\times2=52$。

2 類題 配合課本 P39 例題 8　三角形兩邊中點連線性質的應用　配合課本 P39 隨堂練習 **熟練**

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，F、G 分別爲 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$ 的中點，若 $\overline{FG}=2.5$，求 $\overline{DE}+\overline{BC}$。



解

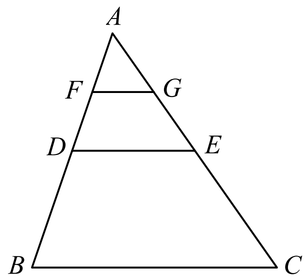
在 $\triangle ADE$ 中，F、G 分別爲 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$ 的中點，

$\therefore \overline{FG}=\dfrac{1}{2}\overline{DE}$，$\overline{DE}=2\overline{FG}=2\times2.5=5$，

同理，$\overline{BC}=2\overline{DE}=2\times5=10$，

故 $\overline{DE}+\overline{BC}=5+10=15$。

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，F、G 分別爲 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$ 的中點，若 $\overline{DE}=18$，求 $\overline{FG}+\overline{BC}$。



解

在 $\triangle ADE$ 中，F、G 分別爲 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$ 的中點，

$\therefore \overline{FG}=\dfrac{1}{2}\overline{DE}=\dfrac{1}{2}\times18=9$，

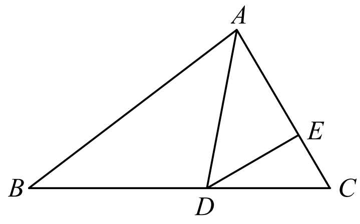
同理，$\overline{BC}=2\overline{DE}=2\times18=36$，

故 $\overline{FG}+\overline{BC}=9+36=45$。

1-2 自我磨練

配合課本 P41～42 自我評量

1. 如圖，$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{CE}=8$，$\overline{AE}=\overline{CD}=16$，$\overline{BD}=24$，$\triangle ADE$ 的面積是 100，求：
   (1) $\triangle ADC$ 的面積。
   (2) $\triangle ABC$ 的面積。



(1) $\triangle ADE$ 的面積：$\triangle ADC$ 的面積 $=\overline{AE}:\overline{AC}$

$100:\triangle ADC$ 的面積 $=16:(16+8)$

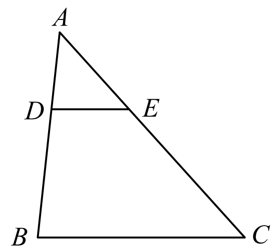
$\triangle ADC$ 的面積 $=150$

(2) $\triangle ADC$ 的面積：$\triangle ABC$ 的面積 $=\overline{CD}:\overline{BC}$

$150:\triangle ABC$ 的面積 $=16:(24+16)$

$\triangle ABC$ 的面積 $=375$

2. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$，若 $\overline{AE}=12$，$\overline{EC}=20$，$\overline{DE}=9$，$\overline{DB}=15$，
   求 $\triangle ABC$ 的周長。



在 $\triangle ABC$ 中，$\because \overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$，

$\therefore \overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$

$\overline{AD}:15=12:20$

$\overline{AD}=9$

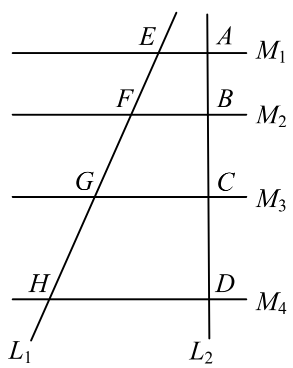
又 $\overline{AE}:\overline{AC}=\overline{DE}:\overline{BC}$

$12:(12+20)=9:\overline{BC}$

$\overline{BC}=24$

$\triangle ABC$ 的周長 $=(12+20)+(9+15)+24=80$。

3. 如圖，M_1、M_2、M_3、M_4 皆為直線，$M_1\,/\!/\,M_2\,/\!/\,M_3\,/\!/\,M_4$，
   直線 L_1 與 L_2 為截線，若 $\overline{EF}:\overline{FG}:\overline{GH}=3:5:7$，
   $\overline{AD}=45$，求 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$。



$\because M_1\,/\!/\,M_2\,/\!/\,M_3\,/\!/\,M_4$，

$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=\overline{EF}:\overline{FG}:\overline{GH}$

$=3:5:7$，

故 $\overline{AC}=45\times\dfrac{3+5}{3+5+7}=24$，

$\overline{BD}=45\times\dfrac{5+7}{3+5+7}=36$。

4. 如圖，已知△ABC，回答下列問題：

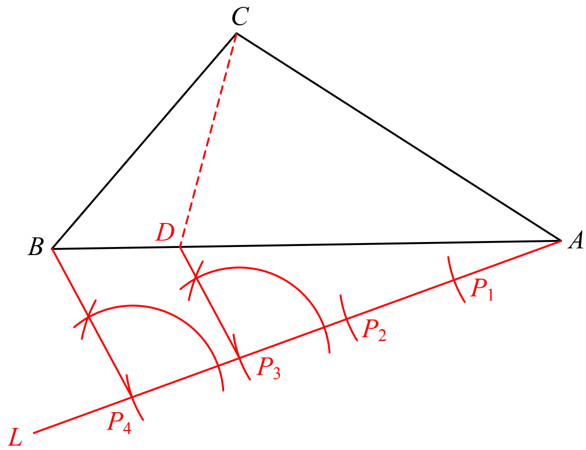
(1)依下面的步驟利用尺規完成作圖：

① 過 A 點作一條異於 $\overline{AB}$ 的直線 L。

② 在 L 上依序取 P_1、P_2、P_3、P_4 四點，使得 $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4}$ 。

③ 連接 $\overline{P_4B}$ 。

④ 過 P_3 作 $\overline{P_3D} // \overline{P_4B}$ ，交 $\overline{AB}$ 於 D 點。



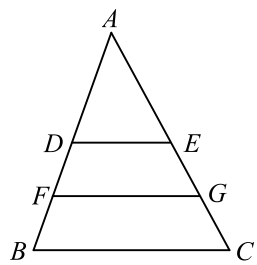
(2)在(1)的完成圖中，

① $\overline{AP_3}$ ： $\overline{P_3P_4}$ ＝__3__：__1__。

② 連接 $\overline{CD}$ ，則△ADC 的面積：△BDC 的面積＝__3__：__1__。

△ADC 的面積：△BDC 的面積＝ $\overline{AD}$ ： $\overline{BD}$ ＝3：1。

5. 如圖，△ABC 中，D、E 分別爲 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，F、G 分別爲 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CE}$ 的中點，若 $\overline{DE}$ ＝12，求 $\overline{FG}$ 。



∵D、E 分別爲 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，

∴ $\overline{DE} // \overline{BC}$ ，

且 $\overline{BC} = 2\overline{DE} = 2\times12 = 24$，

又 F、G 分別爲 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CE}$ 的中點，

且 $\overline{DE} // \overline{BC}$ ，

∴ $\overline{FG}$ 爲梯形 $DBCE$ 的兩腰中點連線段，

故 $\overline{FG} = \dfrac{1}{2}\times(\overline{DE} + \overline{BC})$

$= \dfrac{1}{2}\times(12+24) = 18$。

1-3 相似多邊形

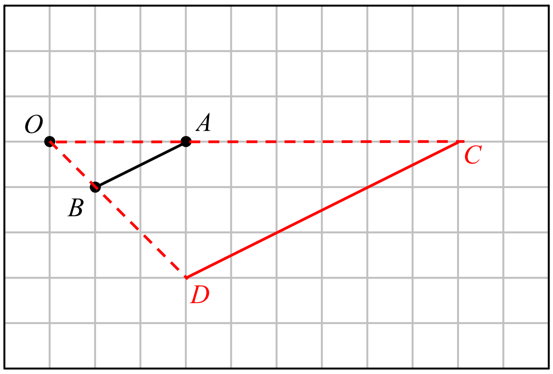
1.圖形的縮放

1. 一線段經過縮放後仍是線段，且縮放後的線段與原線段平行或在同一直線上。
2. 線段縮放 k 倍後，縮放後的線段長為原線段長的 k 倍。
3. 任意一個角經過 r 倍縮放後，其角度不變。
4. 一個多邊形進行 r 倍縮放後，所得的圖形稱為原多邊形的 r 倍縮放圖。

1 類題 配合課本 P45 隨堂練習 圖形的縮放 配合課本 P45 隨堂練習 熟練

如圖，O 點不在 $\overline{AB}$ 上，畫出以 O 點為中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 3 倍後的圖形。

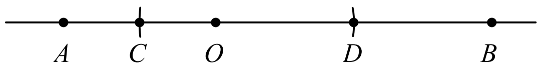
解



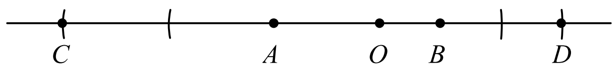
$\overline{CD}$ 即為所求。

如果 O 點在 $\overline{AB}$ 上或其延長線上，則下列選項敘述何者錯誤？

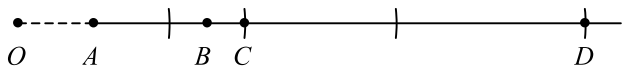
(A) $\overline{CD}$ 是以 O 點為中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 $\frac{1}{2}$ 倍後得到的圖形。



(B) $\overline{CD}$ 是以 O 點為中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 3 倍後得到的圖形。



(C) $\overline{CD}$ 是以 O 點為中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 2 倍後得到的圖形。



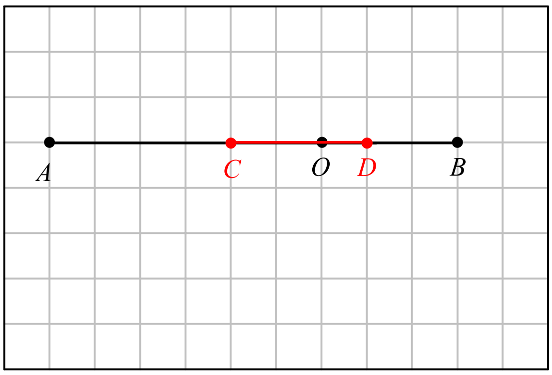
解

(C)

即時演練

如圖，O 點在 $\overline{AB}$ 上，畫出以 O 點為中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 $\frac{1}{3}$ 倍後的圖形。

$\overline{CD}$ 即為所求。



2 類題 配合課本 P48 例題 1　多邊形的縮放　配合課本 P48 隨堂練習 **熟練**

有一邊長為 3 公分的正十邊形，將它縮放 2 倍後所得的縮放圖形，其邊長與每一個內角度數分別是多少？

解

∵縮放後的多邊形，會與原多邊形的對應邊成比例、對應角相等，

∴邊長變成原來的 2 倍，

即 $3\times2=6$（公分）。

而正十邊形的每一個內角是 144°，

∴每一個內角度數保持不變，仍是 144°。

有一邊長為 10 公分的正五邊形，將它縮放 $\frac{1}{5}$ 倍後所得的縮放圖形，其邊長與每一個內角度數分別是多少？

解

∵縮放後的多邊形，會與原多邊形的對應邊成比例、對應角相等，

∴邊長變成原來的 $\frac{1}{5}$ 倍，

即 $10\times\frac{1}{5}=2$（公分）。

而正五邊形的每一個內角是 108°，

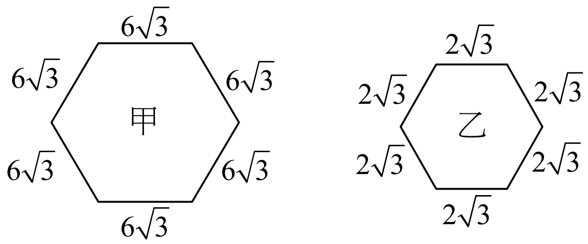
∴每一個內角度數保持不變，仍是 108°。

2. 相似多邊形

1. 如果兩個多邊形的對應角相等、對應邊成比例，就稱這兩個多邊形相似。
2. 如果兩個多邊形相似，它們的對應角相等、對應邊成比例。

1 類題 配合課本 P50 例題 2　相似多邊形的判別　配合課本 P50 隨堂練習 **熟練**

如圖，甲、乙都是正六邊形，回答下列問題，並說明理由。



(1)甲、乙的對應角是否相等？

(2)甲、乙的對應邊是否成比例？

(3)甲、乙是否相似？

解

(1)是，

∵正六邊形每一個內角都是 120°，

∴對應角相等。

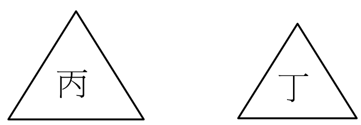
(2)是，∵對應邊長比都是 3：1。

(3)是，

∵對應角相等、對應邊成比例，

∴甲與乙相似。

如圖，丙是邊長為 3 的正三角形，丁是邊長為 2.5 的正三角形，回答下列問題：



(1)丙、丁的對應角是否相等？

(2)丙、丁的對應邊是否成比例？

(3)丙、丁是否相似？

解

(1)是，

∵正三角形每一個內角都是 60°，

∴對應角相等。

(2)是，∵對應邊長比都是 $3：2.5=6：5$。

(3)是，

∵對應角相等、對應邊成比例，

∴丙與丁相似。

2 類題　配合課本 P51 例題 3　相似多邊形的判別　配合課本 P51 隨堂練習　熟練

回答下列問題，並說明理由。

(1)兩個等腰直角三角形是否相似？

(2)兩個平行四邊形是否相似？

解

(1)兩個等腰直角三角形一定相似，

∵兩個等腰直角三角形的

對應邊成比例（$1:1:\sqrt{2}$），

且對應角也相等（45°、45°、90°）。

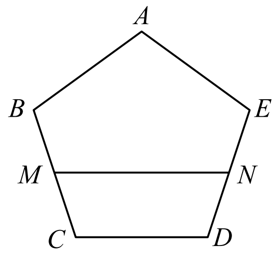
(2)兩個平行四邊形不一定相似，

∵兩個平行四邊形的

對應邊不一定成比例，

且對應角不一定相等。

如圖，正五邊形 $ABCDE$ 中，M、N 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{DE}$ 的中點，且 $\overline{MN}\,//\,\overline{CD}$，回答下列問題：



(1)五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $ABMNE$ 的對應角是否相等？___是___

(2)五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $ABMNE$ 的對應邊是否成比例？___否___

(3)五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $ABMNE$ 是否相似？___否___

3 類題　配合課本 P52 例題 4　相似多邊形的對應關係　配合課本 P52 隨堂練習　熟練

已知五邊形 $ABCDE$～五邊形 $PQRST$，A、B、C、D、E 的對應頂點依序為 P、Q、R、S、T，若 $\overline{BC}=27$，$\overline{CD}=5x+1$，$\overline{QR}=9$，$\overline{RS}=2x-2$，求 x 的值。

解

∵相似形的對應邊成比例，

$\therefore \overline{BC}:\overline{QR}=\overline{CD}:\overline{RS}$

$27:9=(5x+1):(2x-2)$

$54x-54=45x+9$

$9x=63$

$x=7$。

承類題 3，若 $\angle C+\angle D=180°$，$\angle A:\angle B:\angle E=3:4:5$，求 $\angle T$。

解

設 $\angle A=3r°$，$\angle B=4r°$，$\angle E=5r°$（$r\neq0$），

$\because \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=540°$，

$\therefore 3r+4r+180+5r=540$

$r=30$

又相似形的對應角相等，

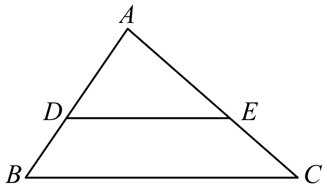
故 $\angle T=\angle E=5\times30°=150°$。

3.三角形的相似性質

1. AA（AAA）相似性質：若兩個三角形的兩組（三組）對應角相等，則這兩個三角形相似。
2. SAS 相似性質：若兩個三角形有一組對應角相等，且夾此等角的兩組對應邊成比例，則這兩個三角形相似。
3. SSS 相似性質：若兩個三角形的三組對應邊成比例，則這兩個三角形相似。

1 類題　配合課本 P54 例題 5　平行線與相似三角形　配合課本 P54 隨堂練習　熟練

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，$\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$，若 $\overline{DE}=18$，$\overline{BC}=30$，$\triangle ABC$ 的周長爲 75，求$\triangle ADE$ 的周長。



解

在$\triangle ADE$ 與$\triangle ABC$ 中，

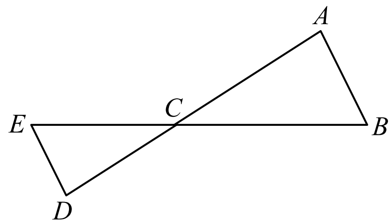
$\because \overline{DE}\,//\,\overline{BC}$，$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$，

故$\triangle ADE$ 的周長：$\triangle ABC$ 的周長$=\overline{DE}:\overline{BC}$

$\triangle ADE$ 的周長：$75=18:30$

$\triangle ADE$ 的周長$=45$。

如圖，$\overline{AB}\,//\,\overline{DE}$，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 C 點，若 $\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=15$，$\overline{DE}=6$，求 $\overline{EC}$。



解

在$\triangle ABC$ 與$\triangle DEC$ 中，

$\because \overline{AB}\,//\,\overline{DE}$，$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEC$，

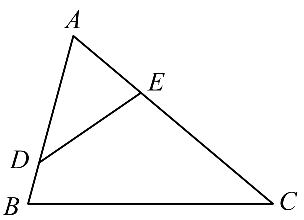
故 $\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EC}$

$9:6=15:\overline{EC}$

$\overline{EC}=10$。

2 類題　配合課本 P55 例題 6　AA 相似性質　配合課本 P55 隨堂練習　熟練

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，$\angle ADE=\angle C$，若 $\overline{AC}=32$，$\overline{BC}=30$，$\overline{DE}=15$，求 $\overline{AD}$。



解

在$\triangle AED$ 與$\triangle ABC$ 中，

$\because \angle ADE=\angle C$，$\angle A=\angle A$，

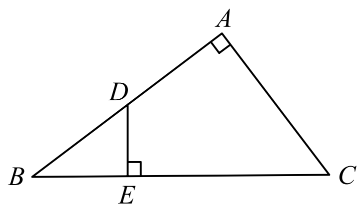
$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABC$（$AA$ 相似性質），

故 $\overline{AD}:\overline{AC}=\overline{DE}:\overline{BC}$

$\overline{AD}:32=15:30$

$\overline{AD}=16$。

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，$\overline{DE}\perp\overline{BC}$，$D$ 爲 $\overline{AB}$ 的中點，若 $\overline{AB}=20$，$\overline{BC}=25$，求 $\overline{EC}$。



解

在$\triangle ABC$ 與$\triangle EBD$ 中，

$\because \angle A=\angle BED=90°$，$\angle B=\angle B$，

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBD$（$AA$ 相似性質），

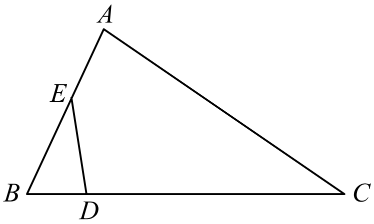
$\overline{AB}:\overline{EB}=\overline{BC}:\overline{BD}$

$20:\overline{EB}=25:10$

$\overline{EB}=8$，故 $\overline{EC}=25-8=17$。

3 類題 配合課本 P57 例題 7 — SAS 相似性質 — 配合課本 P57 隨堂練習 **熟練**

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AE}=5$，$\overline{BE}=7$，$\overline{BD}=4$，$\overline{CD}=17$，回答下列問題：



(1) $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBE$ 是否相似？為什麼？

(2)若 $\overline{AC}=18$，求 $\overline{DE}$。

解

(1)在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBE$ 中，

$\because \overline{AB}:\overline{DB}=(5+7):4=3:1$，

$\overline{BC}:\overline{BE}=(4+17):7=3:1$，

又 $\angle B=\angle B$，

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBE$（$SAS$ 相似性質）。

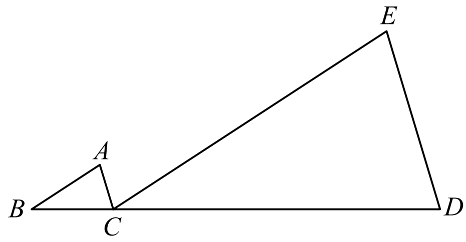
(2) $\because \triangle ABC \sim \triangle DBE$，

$\therefore \overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{DE}$

$(5+7):4=18:\overline{DE}$

$\overline{DE}=6$。

如圖，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 中，B、C、D 三點共線，$\overline{AB}\,//\,\overline{EC}$，若 $\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=3.5$，$\overline{EC}=24$，$\overline{CD}=20$，求 $\overline{ED}$。



解

$\because \overline{AB}\,//\,\overline{EC}$，

$\therefore \angle ABC=\angle ECD$，

在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ECD$ 中，

$\because \overline{AB}:\overline{EC}=6:24=1:4$，

$\overline{BC}:\overline{CD}=5:20=1:4$，

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ECD$（$SAS$ 相似性質），

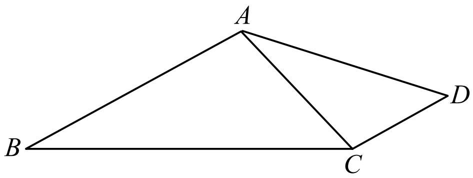
故 $\overline{AB}:\overline{EC}=\overline{AC}:\overline{ED}$

$6:24=3.5:\overline{ED}$

$\overline{ED}=14$。

4 類題 配合課本 P59 例題 8 — SSS 相似性質 — 配合課本 P59 隨堂練習 **熟練**

如圖，$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=12$，$\overline{AC}=6$，$\overline{CD}=4$，$\overline{AD}=8$，回答下列問題：



(1)為什麼 $\triangle ABC \sim \triangle CAD$？

(2) $\angle ACD$ 與 $\triangle ABC$ 的哪個角相等？

解

(1)在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle CAD$ 中，

$\because \overline{AB}:\overline{CA}=9:6=3:2$，

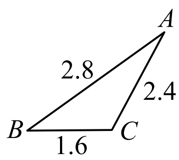
$\overline{BC}:\overline{AD}=12:8=3:2$，

$\overline{AC}:\overline{CD}=6:4=3:2$，

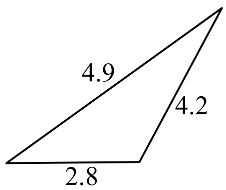
$\therefore \triangle ABC \sim \triangle CAD$（$SSS$ 相似性質）。

(2) $\because \triangle CAD \sim \triangle ABC$，$\therefore \angle ACD=\angle BAC$。

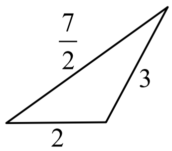
勾選出與 $\triangle ABC$ 相似的三角形。



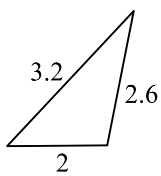
(1) ☑



(2) ☑



(3) ☐

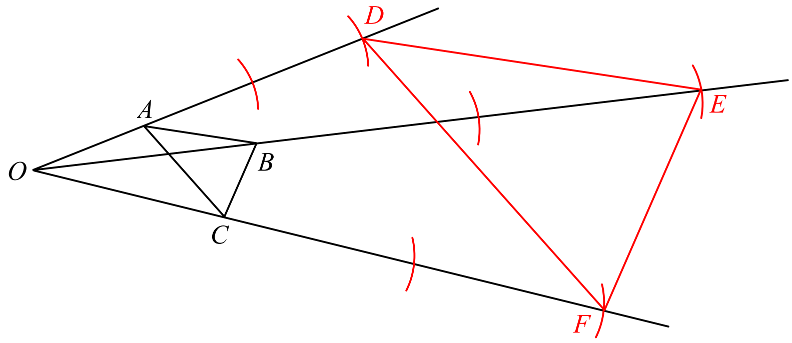


1-3 自我磨練

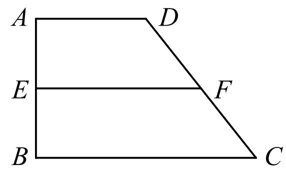
配合課本 P61～63 自我評量

1. 如圖，在 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 上取 D、E、F 三點，使得△ABC～△DEF，且 $\overline{AB}=\dfrac{1}{3}\overline{DE}$。

（只要作圖，不必寫出作法）



2. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為梯形，$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$，E、F 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{DC}$ 的中點，已知 $\overline{AD}=6$，$\overline{EF}=9$，回答下列問題：



(1)梯形 $AEFD$ 與梯形 $EBCF$ 是否相似？
(2)梯形 $AEFD$ 與梯形 $ABCD$ 是否相似？
(3)梯形 $EBCF$ 與梯形 $ABCD$ 是否相似？

(1)梯形 $AEFD$ 與梯形 $EBCF$ 不相似，
∵兩個梯形的對應角相等，但對應邊不成比例。
(2)梯形 $AEFD$ 與梯形 $ABCD$ 不相似，
∵兩個梯形的對應角相等，但對應邊不成比例。
(3)梯形 $EBCF$ 與梯形 $ABCD$ 不相似，
∵兩個梯形的對應角相等，但對應邊不成比例。

3. 已知五邊形 $ABCDE$～五邊形 $PQRST$，A、B、C、D、E 的對應頂點依序為 P、Q、R、S、T，若 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DE}:\overline{EA}=4:5:6:7:8$，且五邊形 $PQRST$ 的周長為 180，求 $\overline{QR}$ 與 $\overline{ST}$。

∵五邊形 $ABCDE$～五邊形 $PQRST$，

$$\therefore \overline{PQ}:\overline{QR}:\overline{RS}:\overline{ST}:\overline{TP}=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DE}:\overline{EA}=4:5:6:7:8$$

故 $\overline{QR}=180\times\dfrac{5}{4+5+6+7+8}=30$，

$\overline{ST}=180\times\dfrac{7}{4+5+6+7+8}=42$。

4. 已知六邊形 $ABCDEF$～六邊形 $PQRSTU$，A、B、C、D、E、F 的對應頂點依序為 P、Q、R、S、T、U，若 $\angle A：\angle B：\angle C：\angle D=3：5：4：6$，$\angle E=110°$，$\angle F=160°$，求 $\angle P$ 與 $\angle Q$。

∵六邊形 $ABCDEF$～六邊形 $PQRSTU$，

∴$\angle P：\angle Q：\angle R：\angle S=\angle A：\angle B：\angle C：\angle D$

$=3：5：4：6$

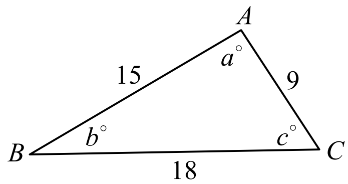
又六邊形的內角和＝$(6-2)\times 180°=720°$，

則 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=720°-110°-160°=450°$，

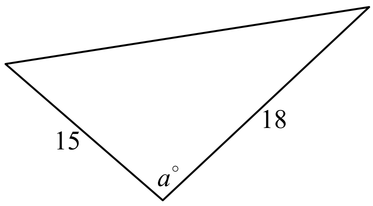
故 $\angle P=450°\times\dfrac{3}{3+5+4+6}=75°$，

$\angle Q=450°\times\dfrac{5}{3+5+4+6}=125°$。

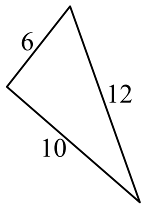
5. 下列哪些三角形與△ABC 相似，在□中打「∨」，並寫出所用的相似性質：



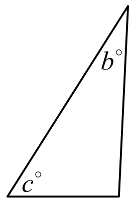
(1) □ ______相似性質



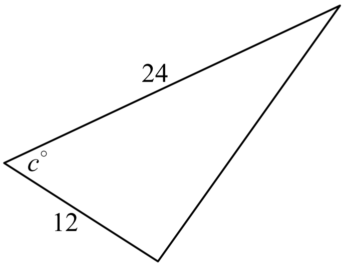
(2) ∨ SSS 相似性質



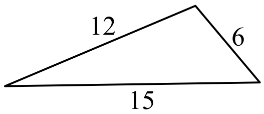
(3) ∨ AA 相似性質



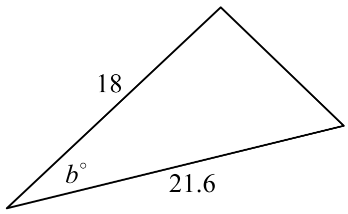
(4) ∨ SAS 相似性質



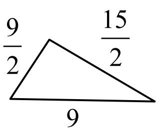
(5) □ ______相似性質



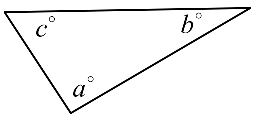
(6) ∨ SAS 相似性質



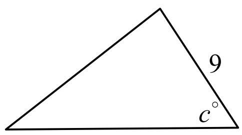
(7) ∨ SSS 相似性質



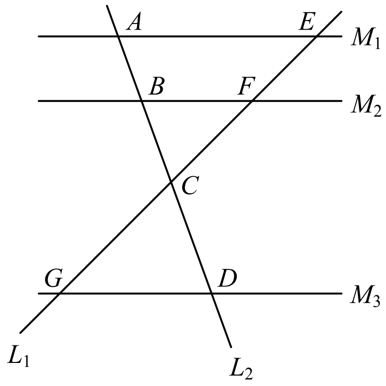
(8) ∨ AA（AAA）相似性質



(9) □ ______相似性質



6. 如圖，M_1、M_2、M_3 皆為直線，$M_1 // M_2 // M_3$，直線 L_1、L_2 交於 C 點，$\overline{AC}=21$，$\overline{EF}=12$，$\overline{FC}=16$，$\overline{CG}=20$，回答下列問題：



(1)求 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 和 $\overline{CD}$。

(2)若 $\overline{BF}=15$，求 $\overline{AE}$、$\overline{GD}$。

(1)$\because M_1 // M_2$，

$\therefore \overline{AB}:\overline{AC}=\overline{EF}:\overline{EC}$

$\overline{AB}:21=12:(12+16)$

$\overline{AB}=9$

$\overline{BC}=21-9=12$，

$\because M_2 // M_3$，$\therefore \triangle BCF \sim \triangle DCG$，

則 $\overline{BC}:\overline{CD}=\overline{FC}:\overline{CG}$

$12:\overline{CD}=16:20$

$\overline{CD}=15$。

(2)$\because M_1 // M_2$，

$\therefore \overline{CB}:\overline{CA}=\overline{BF}:\overline{AE}$

$12:21=15:\overline{AE}$

$\overline{AE}=\dfrac{105}{4}$。

$\because M_2 // M_3$，$\therefore \triangle BCF \sim \triangle DCG$，

則 $\overline{BC}:\overline{CD}=\overline{BF}:\overline{GD}$

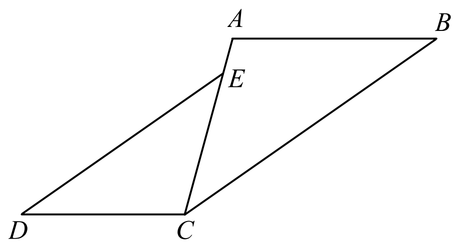
$12:15=15:\overline{GD}$

$\overline{GD}=\dfrac{75}{4}$。

7. 如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle CDE$ 中，A、E、C 三點共線，$\overline{AB} // \overline{CD}$，$\overline{BC} // \overline{DE}$，回答下列問題：

(1)$\triangle ABC$ 與 $\triangle CDE$ 是否相似？為什麼？

(2)若 $\overline{AB}=30$，$\overline{CD}=24$，$\overline{DE}=36$，求 $\overline{BC}$。



(1)在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle CDE$ 中，

$\because \overline{AB} // \overline{CD}$，$\overline{BC} // \overline{DE}$，

$\therefore \angle A=\angle ECD$，$\angle ACB=\angle CED$，

故 $\triangle ABC \sim \triangle CDE$（$AA$ 相似性質）。

(2)$\because \triangle ABC \sim \triangle CDE$，

$\therefore \overline{AB}:\overline{CD}=\overline{BC}:\overline{DE}$

$30:24=\overline{BC}:36$

$\overline{BC}=45$。

1-4 相似三角形的應用與三角比

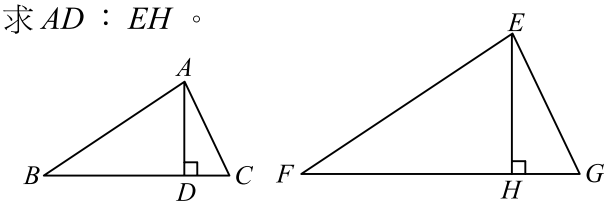
1. 相似三角形的比例關係

兩個相似三角形，有下列關係：

(1)對應高的比＝對應邊長的比。　(2)面積的比＝對應邊長的平方比。

1 類題　配合課本 P65 隨堂練習　相似三角形對應高的比＝對應邊長的比　配合課本 P65 隨堂練習　熟練

如圖，$\triangle ABC \sim \triangle EFG$，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$於 D 點，$\overline{EH} \perp \overline{FG}$於 H 點，若$\overline{AB}:\overline{EF}=2:3$，求$\overline{AD}:\overline{EH}$。



解

$\because \triangle ABC \sim \triangle EFG$，

$\therefore \angle B=\angle F$，

在$\triangle ABD$與$\triangle EFH$中，

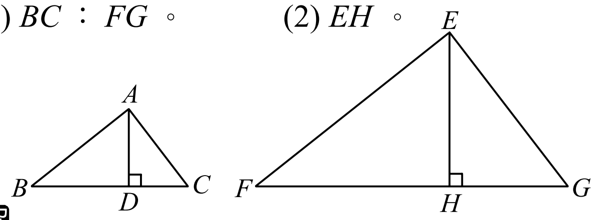
$\because \angle B=\angle F$，$\angle ADB=\angle EHF=90°$，

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle EFH$（$AA$ 相似性質），

故$\overline{AD}:\overline{EH}=\overline{AB}:\overline{EF}=2:3$。

如圖，$\triangle ABC \sim \triangle EFG$，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$於 D 點，$\overline{EH} \perp \overline{FG}$於 H 點，若$\overline{AC}=15$，$\overline{EG}=30$，$\overline{AD}=12$，求：

(1) $\overline{BC}:\overline{FG}$。　(2) $\overline{EH}$。



解

(1) $\because \triangle ABC \sim \triangle EFG$，

$\therefore \overline{AC}:\overline{EG}=\overline{BC}:\overline{FG}=15:30=1:2$。

(2)由 AA 相似性質可知$\triangle ADC \sim \triangle EHG$，

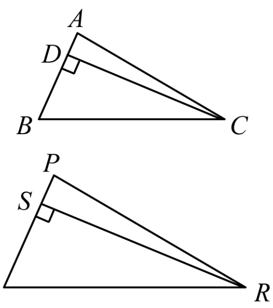
故$\overline{AC}:\overline{EG}=\overline{AD}:\overline{EH}$

$15:30=12:\overline{EH}$

$\overline{EH}=24$。

2 類題　配合課本 P66 例題 1　相似三角形面積的比＝對應邊長的平方比　配合課本 P66 隨堂練習　熟練

如圖，$\triangle ABC \sim \triangle PQR$，$\overline{CD} \perp \overline{AB}$，$\overline{RS} \perp \overline{PQ}$，若$\triangle ABC$的面積為 18，$\triangle PQR$的面積為 30，求$\overline{AB}^2$與$\overline{PQ}^2$的比值。



解

$\because \triangle ABC \sim \triangle PQR$，$\therefore \overline{AB}:\overline{PQ}=\overline{CD}:\overline{RS}$，

又$\triangle ABC$面積：$\triangle PQR$面積

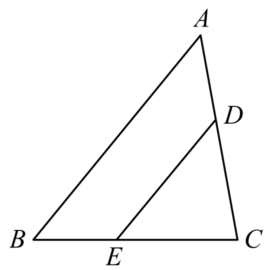
$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}:\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{RS}$

$=\overline{AB}\times\overline{AB}:\overline{PQ}\times\overline{PQ}=\overline{AB}^2:\overline{PQ}^2$

$=18:30=3:5$

所以$\overline{AB}^2$與$\overline{PQ}^2$的比值為$\frac{3}{5}$。

如圖，$\triangle ABC$中，D、E兩點分別在$\overline{AC}$、$\overline{BC}$上，$\overline{DE}//\overline{AB}$，若$\overline{BE}=4$，$\overline{EC}=6$，$\triangle ABC$的面積為 50，求$\triangle CDE$的面積。



解

$\because \overline{DE}//\overline{AB}$，

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CAB$，

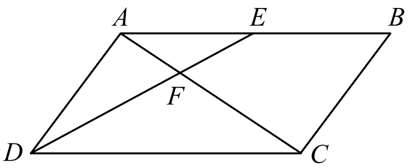
故$\triangle CDE$的面積：$\triangle CAB$的面積$=\overline{EC}^2:\overline{BC}^2$

$\triangle CDE$的面積：$50=6^2:(4+6)^2$

$\triangle CDE$的面積$=18$。

3類題　配合課本 P67 例題 3　相似三角形面積比的應用　配合課本 P67 隨堂練習　熟練

如圖，▱$ABCD$ 中，$\overline{AE}$ ：$\overline{BE}$ ＝1：1，$\overline{AC}$ 和 $\overline{ED}$ 交於 F 點，求△AEF 與△CDF 的面積比。



解

∵ $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$，∴ ∠EAF＝∠DCF，

在△AEF 與△CDF 中，

∵ ∠AFE＝∠CFD，∠EAF＝∠DCF，

∴△AEF～△CDF（AA 相似性質），

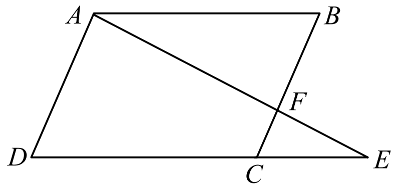
故△AEF 的面積：△CDF 的面積

$=\overline{AE}^2 : \overline{CD}^2$

$=\overline{AE}^2 : (2\overline{AE})^2$

＝1：4

如圖，▱$ABCD$ 中，E 爲 $\overrightarrow{DC}$ 上的一點，$\overline{AE}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 F 點，若 $\overline{AB}$ ＝12，$\overline{CE}$ ＝6，△EDA 的面積爲 54，回答下列問題：



(1)在△ABF 與△EDA 中，

∵ ∠BAF＝__∠AED__

（理由：$\overline{AB}$ // $\overline{DE}$ ），

__∠ABF＝∠ADE__

（理由：▱$ABCD$ 對角相等），

∴△ABF～△EDA（__AA__相似性質），

(2)求△ABF 的面積。

∵△ABF～△EDA，

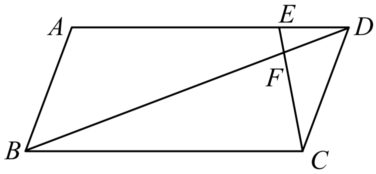
∴△ABF的面積:△EDA的面積＝$\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$

△ABF 的面積：54＝$12^2 : (12+6)^2$

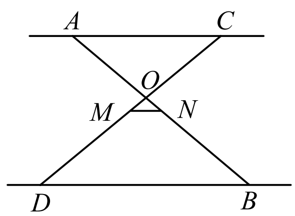
△ABF 的面積＝24

即時演練

1. 如圖，▱$ABCD$ 中，$\overline{AE}$ ＝3 $\overline{DE}$ ，則△DEF 的面積：△CFB 的面積 ＝__1：16__。



2. 如圖，$\overline{AC}$ // $\overline{DB}$ // $\overline{MN}$ ，若 $\overline{AC}$ ＝5，$\overline{MN}$ ＝1，$\overline{DB}$ ＝7，且△AOC 的面積爲 10，則四邊形 $MNBD$ 的面積爲 __$\frac{96}{5}$__ 。

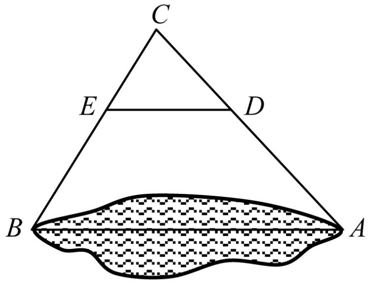


2.簡易測量

生活中無法直接求得的距離或長度，可利用相似三角形作簡易測量。

1 類題 配合課本 P68 例題 4 　　測量湖寬　　配合課本 P68 隨堂練習 **熟練**

如圖，語非想知道 A、B 兩點間的湖寬，首先她在湖邊找一點 C，並測得 $\overline{CA}=35$ 公尺，$\overline{CD}=14$ 公尺，$\overline{CB}=30$ 公尺，$\overline{CE}=12$ 公尺，$\overline{DE}=16$ 公尺，求湖寬 $\overline{AB}$。



解

在△ABC 與△DEC 中，

∵ $\overline{CD}:\overline{CA}=14:35=2:5$，

$\overline{CE}:\overline{CB}=12:30=2:5$，

$\angle C=\angle C$，

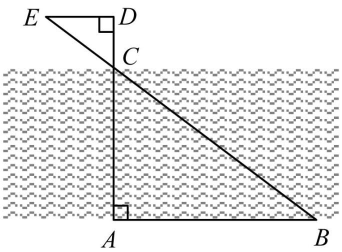
∴△ABC～△DEC（SAS 相似性質），

則 $\overline{CA}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{DE}$

$35:14=\overline{AB}:16$

$\overline{AB}=40$（公尺）。

如圖，軒宇想知道一條河道的寬，因此設計直角三角形 ABC 及直角三角形 DCE，其中 A、C、D 三點及 B、C、E 三點分別在同一直線上，若軒宇測得 $\overline{AB}=24$ 公尺，$\overline{CD}=6$ 公尺，$\overline{DE}=8$ 公尺，求河寬 $\overline{AC}$。



解

在△ABC 與△DEC 中，

∵ $\angle CAB=\angle CDE=90°$，

$\angle ACB=\angle DCE$，

∴△ABC～△DEC（AA 相似性質），

則 $\overline{AC}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{DE}$

$\overline{AC}:6=24:8$

$\overline{AC}=18$（公尺）。

即時演練

如圖，在 A、B 兩點間有一湖泊，家豪為了測量 A、B 兩點間的距離，首先湖外找了一點 C，並分別在 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 上，找到 D、E 兩點，測得 $\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$，$\overline{CA}=120$ 公尺，$\overline{CD}=45$ 公尺，$\overline{DE}=54$ 公尺，求 A、B 兩點的距離。

在△ABC 中，

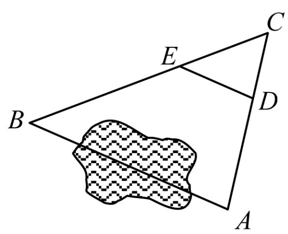
∵ $\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$，

∴ $\overline{CD}:\overline{CA}=\overline{DE}:\overline{AB}$

$45:120=54:\overline{AB}$

$\overline{AB}=144$

故 A、B 兩點的距離為 144 公尺。

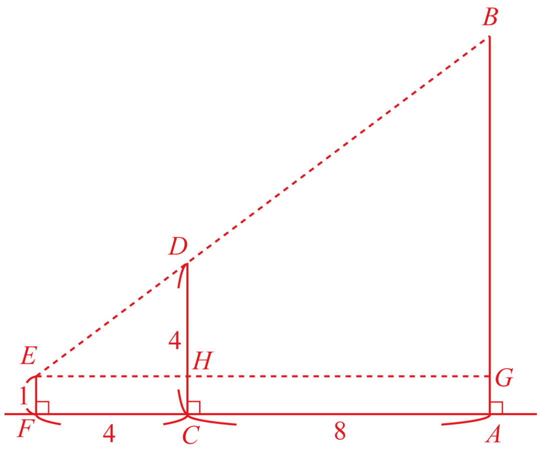


2類題　配合課本 P69 例題 5　測量樹高　配合課本 P69 隨堂練習　熟練

如圖，小凱想要測量樹高，他在樹前 8 公尺立了一根長 4 公尺的木棒，並從木棒後方 4 公尺的觀測點，觀察到木棒的頂端與樹梢成一直線，已知望遠鏡至地面的高度為 1 公尺，求樹高。

解

依題意畫出下圖，



$\because$ $\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 皆垂直於 $\overline{AC}$，

$\therefore$ $\overline{CD}\,/\!/\,\overline{AB}$，

在$\triangle EBG$中，

$\because$ $\overline{DH}\,/\!/\,\overline{BG}$，

$\therefore$ $\overline{EH} : \overline{EG} = \overline{DH} : \overline{BG}$

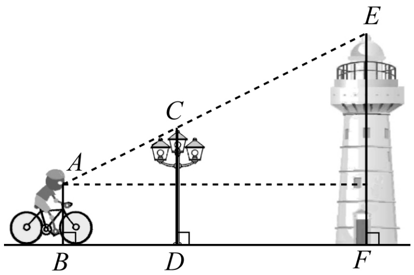
$4:(4+8)=(4-1):\overline{BG}$

$\overline{BG}=9$

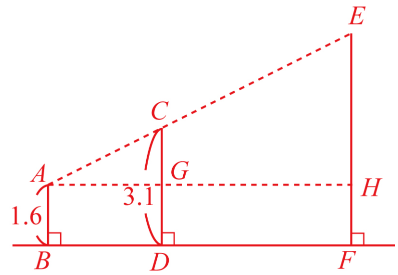
則 $\overline{AB}=9+1=10$，

故樹高 $\overline{AB}=10$（公尺）。

如圖，冠宇到河堤旁騎腳踏車，看見前方 8 公尺處有一座高塔 $\overline{EF}$，高塔和冠宇之間有一座路燈 $\overline{CD}$，且 A、C、E 三點恰好在同一直線上，若 $\overline{AB}=1.6$ 公尺，$\overline{CD}=3.1$ 公尺，$\overline{BD}:\overline{DF}=3:5$，求高塔 $\overline{EF}$。



解



$\therefore$ $\overline{CD}\,/\!/\,\overline{EF}$，

在$\triangle AEH$中，

$\because$ $\overline{CG}\,/\!/\,\overline{EH}$，

$\because$ $\overline{CD}$ 與 $\overline{EF}$ 皆垂直於 $\overline{DF}$，

$\therefore$ $\overline{AG} : \overline{AH} = \overline{CG} : \overline{EH}$

$3:8=(3.1-1.6):\overline{EH}$

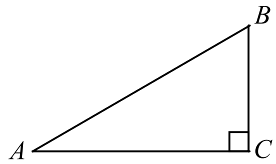
$\overline{EH}=4$

則 $\overline{EF}=1.6+4=5.6$，

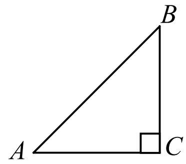
故高塔 $\overline{EF}=5.6$（公尺）。

3. 特殊直角三角形的邊長比

1. 直角三角形 ABC 中，$\angle A=30°$，$\angle B=60°$，$\angle C=90°$，
則 $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$。

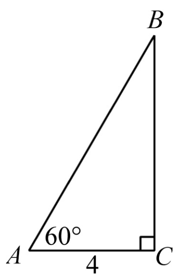


2. 直角三角形 ABC 中，$\angle A=\angle B=45°$，$\angle C=90°$，
則 $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=1:1:\sqrt{2}$。



1 類題　配合課本 P71 例題 6　30－60－90 度三角形的三邊長　配合課本 P71 隨堂練習　熟練

如圖，直角三角形 ABC 中，
$\angle A=60°$，$\angle C=90°$，
$\overline{AC}=4$，求 $\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 的長。



解

在直角三角形 ABC 中，

$\because \angle A=60°$，$\angle C=90°$，

$\angle B=180°-60°-90°=30°$，

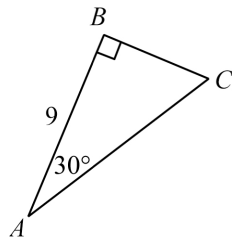
$\therefore \overline{AC}:\overline{BC}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$。

$4:\overline{BC}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$

$\therefore \dfrac{4}{1}=\dfrac{\overline{BC}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overline{AB}}{2}$，

可得 $\overline{BC}=4\sqrt{3}$、$\overline{AB}=8$。

如圖，直角三角形 ABC 中，
$\angle A=30°$，$\angle B=90°$，
$\overline{AB}=9$，求 $\overline{BC}$ 和 $\overline{AC}$ 的長。



解

在直角三角形 ABC 中，

$\because \angle A=30°$，$\angle B=90°$，

$\angle C=180°-30°-90°=60°$，

$\therefore \overline{BC}:\overline{AB}:\overline{AC}=1:\sqrt{3}:2$。

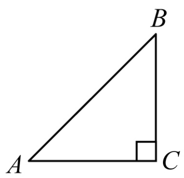
$\overline{BC}:9:\overline{AC}=1:\sqrt{3}:2$

$\therefore \dfrac{\overline{BC}}{1}=\dfrac{9}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overline{AC}}{2}$，

可得 $\overline{BC}=3\sqrt{3}$、$\overline{AC}=6\sqrt{3}$。

2 類題　配合課本 P72 例題 7　45－45－90 度三角形的三邊長　配合課本 P72 隨堂練習　熟練

如圖，等腰直角三角形 ABC 中
$\angle A=\angle B=45°$，$\angle C=90°$，
$\overline{AB}=4$，求 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BC}$ 的長。



解

在等腰直角三角形 ABC 中，

$\because \angle A=\angle B=45°$，$\angle C=90°$，

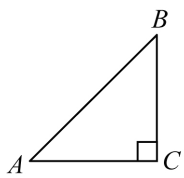
$\therefore \overline{AC}:\overline{BC}:\overline{AB}=1:1:\sqrt{2}$。

$\overline{AC}:\overline{BC}:4=1:1:\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{\overline{AC}}{1}=\dfrac{\overline{BC}}{1}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$，

可得 $\overline{AC}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$。

如圖，等腰直角三角形 ABC 中
$\angle A=\angle B=45°$，$\angle C=90°$，
$\overline{AC}=3$，求 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的長。



解

在等腰直角三角形 ABC 中，

$\because \angle A=\angle B=45°$，$\angle C=90°$，

$\therefore \overline{AC}:\overline{BC}:\overline{AB}=1:1:\sqrt{2}$。

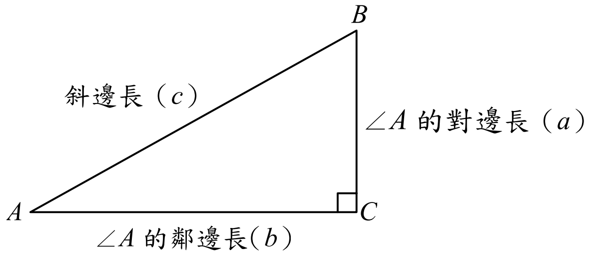
$3:\overline{BC}:\overline{AB}=1:1:\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{3}{1}=\dfrac{\overline{BC}}{1}=\dfrac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}$，

可得 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$、$\overline{BC}=3$。

4. 直角三角形的三角比

如圖，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，



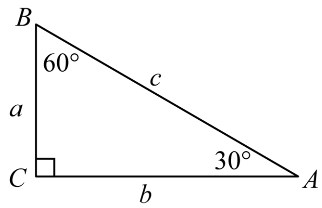
(1) $\dfrac{\angle A\text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 記作 $\sin\angle A$，簡記成 $\sin A$（讀做 sine A），即 $\dfrac{a}{c}=\sin A$。

(2) $\dfrac{\angle A\text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 記作 $\cos\angle A$，簡記成 $\cos A$（讀做 cosine A），即 $\dfrac{b}{c}=\cos A$。

(3) $\dfrac{\angle A\text{ 的對邊長}}{\angle A\text{ 的鄰邊長}}$ 記作 $\tan\angle A$，簡記成 $\tan A$（讀做 tangent A），即 $\dfrac{a}{b}=\tan A$。

1 類題 配合課本 P75 例題 8 　**特殊角的三角比**　 配合課本 P75 隨堂練習 **熟練**

如圖，在△ABC 中，$\angle A=30°$，$\angle B=60°$，$\angle C=90°$，若 $\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$，求 $\dfrac{\angle A\text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$、$\dfrac{\angle A\text{ 的對邊長}}{\angle A\text{ 的鄰邊長}}$。



解

$\because \angle A=30°$，$\angle B=60°$，$\angle C=90°$，

$\therefore a：b：c=1：\sqrt{3}：2$。

因此，$\dfrac{\angle A\text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{2}$，

$\dfrac{\angle A\text{ 的對邊長}}{\angle A\text{ 的鄰邊長}}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

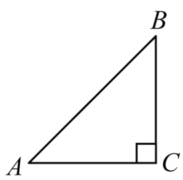
承類題 1，求 $\dfrac{\angle A\text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$。

解

$\dfrac{\angle A\text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

即時演練

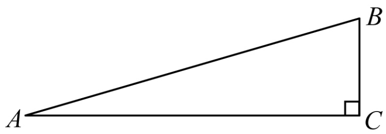
如圖，在△ABC 中，$\angle A=\angle B=45°$，$\angle C=90°$，若 $\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$，則 $\dfrac{\angle A\text{ 的對邊長}}{\angle A\text{ 的鄰邊長}}=$ __1__。



2 類題　配合課本 P77 例題 9　直角三角形的三角比　配合課本 P77 隨堂練習　熟練

如圖，$\triangle ABC$ 爲直角三角形，$\angle C=90°$，且 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=25:24:7$，將下列 $\triangle ABC$ 各邊長的比值，分別以 $\sin A$、$\cos A$、$\tan A$ 表示。

(1) $\dfrac{7}{25}$　　(2) $\dfrac{24}{25}$　　(3) $\dfrac{7}{24}$



解

因爲 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=25:24:7$，

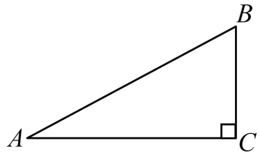
所以(1) $\dfrac{7}{25}=\dfrac{\angle A\text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}=\sin A$，

(2) $\dfrac{24}{25}=\dfrac{\angle A\text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}=\cos A$，

(3) $\dfrac{7}{24}=\dfrac{\angle A\text{ 的對邊長}}{\angle A\text{ 的鄰邊長}}=\tan A$。

如圖，$\triangle ABC$ 爲直角三角形，$\angle C=90°$，且 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=17:15:8$，將下列 $\triangle ABC$ 各邊長的比值，分別以 $\sin B$、$\cos B$、$\tan B$ 表示。

(1) $\dfrac{15}{8}$　　(2) $\dfrac{15}{17}$　　(3) $\dfrac{8}{17}$



解

因爲 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=17:15:8$，

所以(1) $\dfrac{15}{8}=\dfrac{\angle B\text{ 的對邊長}}{\angle B\text{ 的鄰邊長}}=\tan B$，

(2) $\dfrac{15}{17}=\dfrac{\angle B\text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}=\sin B$，

(3) $\dfrac{8}{17}=\dfrac{\angle B\text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}=\cos B$。

3 類題　配合課本 P78 例題 10　坡度百分比　配合課本 P78 隨堂練習　熟練

已知坡度百分比 $=\dfrac{\text{鉛直上升高度}}{\text{水平移動距離}}\times 100\%$，威利在跑步機上設定 8% 的坡度跑 1 小時，若所跑的水平移動距離爲 3000 公尺，則相當於鉛直上升多少公尺？

解

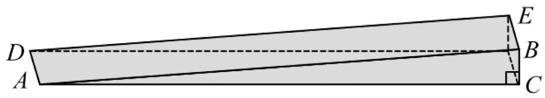
設使用 8% 的坡度時，鉛直上升 x 公尺，

$8\%=\dfrac{x}{3000}\times 100\%$

$x=240$（公尺）。

因此，這 1 小時相當於鉛直上升 240 公尺。

如圖，健康遊戲場滑板坡道的坡度百分比爲 10%，已知此坡道的水平距離 $\overline{AC}$ 爲 30 公尺，則其鉛直高度 $\overline{BC}$ 爲多少公尺？



解

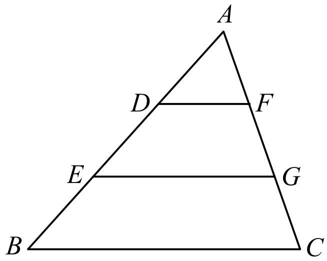
設鉛直高度爲 x 公尺，

$10\%=\dfrac{x}{30}\times 100\%$

$x=3$（公尺）。

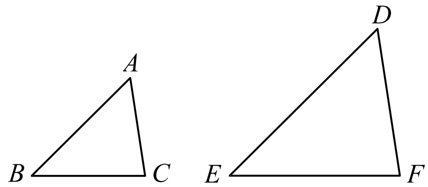
1-4 自我磨練

1. 如圖，△ABC 中，$\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB}$，$\overline{AF}=\overline{FG}=\overline{GC}$，若△$ABC$ 的面積為 90，求△ADF 的面積。



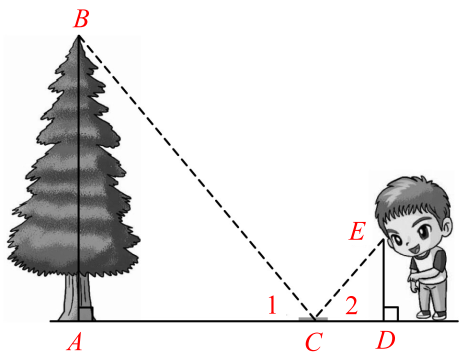
∵ $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB}$，$\overline{AF}=\overline{FG}=\overline{GC}$，
∴ $\overline{DF}\,//\,\overline{EG}\,//\,\overline{BC}$，
則△ADF～△ABC（AA 相似性質），
△ADF 的面積：△ABC 的面積$=\overline{AD}^2:\overline{AB}^2$
△ADF 的面積：$90=1^2:3^2$
△ADF 的面積$=10$。

2. 如圖，已知△ABC～△DEF，A、B、C 的對應頂點為 D、E、F，若△ABC 的周長為 30，△DEF 的周長為 45，求：
(1) $\overline{BC}:\overline{EF}$。
(2)△ABC 的面積：△DEF 的面積。



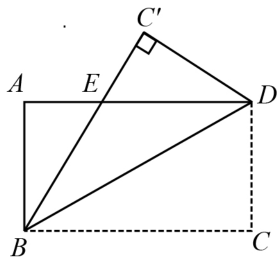
(1)∵△ABC～△DEF，
∴ $\overline{BC}:\overline{EF}=30:45=2:3$。
(2)∵△ABC～△DEF，
∴△ABC 的面積：△DEF 的面積$=\overline{BC}^2:\overline{EF}^2$
$=2^2:3^2$
$=4:9$。

3. 如圖，小博在地上放了一面鏡子，透過鏡子的反射（入射角等於反射角），他可以看見樹梢。已知小博與鏡子的距離 1.4 公尺，鏡子與樹的距離是 3.5 公尺，小博眼睛離地面的高度是 1.6 公尺，求樹高。



設鏡子是 C 點，小博與鏡子距離是 $\overline{CD}$，
鏡子與樹的距離是 $\overline{AC}$，
小博眼睛（E 點）離地面的高度是 $\overline{DE}$。
在△ABC 與△DEC 中，
∵ $\angle BAC=\angle EDC=90°$，$\angle 1=\angle 2$，
∴△ABC～△DEC（AA 相似性質），
則 $\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{DC}$
$\overline{AB}:1.6=3.5:1.4$
$\overline{AB}=4$
故樹高 $\overline{AB}=4$（公尺）。

4. 長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=3\sqrt{3}$，$\angle BDC=60°$，沿著 $\overline{BD}$，將 C 點摺至 C' 點，且 $\overline{BC'}$ 交 $\overline{AD}$ 於 E 點，求：



(1) $\angle EDC'$。

(2) $\overline{EC'}$ 的長。

(1) $\angle ADB=90°-60°=30°$，

$\angle C'DB=\angle BDC=60°$，

$\angle EDC'=\angle C'DB-\angle ADB$

$=60°-30°$

$=30°$

(2) $\triangle EDC'$ 中，$\angle C'=90°$，$\angle EDC'=30°$

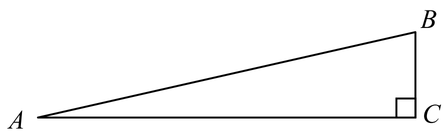
則 $\overline{EC'}:\overline{C'D}=1:\sqrt{3}$

$\overline{EC'}:3\sqrt{3}=1:\sqrt{3}$

$\overline{EC'}=3$。

5. 如圖，$\triangle ABC$ 爲直角三角形，$\angle C=90°$，且 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=41:40:9$，將下列 $\triangle ABC$ 各邊長的比值，分別以 $\sin A$、$\cos A$、$\tan A$ 表示。

(1) $\dfrac{40}{41}$　　(2) $\dfrac{9}{41}$　　(3) $\dfrac{9}{40}$



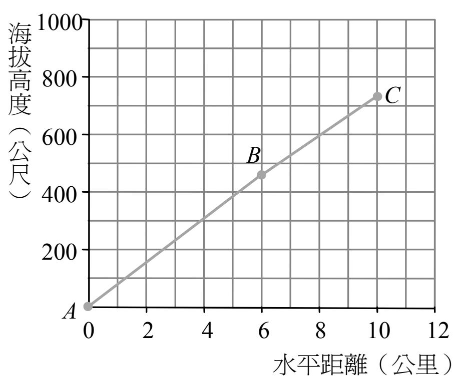
因爲 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=41:40:9$，

所以(1) $\dfrac{40}{41}=\dfrac{\angle A\text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}=\cos A$，

(2) $\dfrac{9}{41}=\dfrac{\angle A\text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}=\sin A$，

(3) $\dfrac{9}{40}=\dfrac{\angle A\text{ 的對邊長}}{\angle A\text{ 的鄰邊長}}=\tan A$。

6. 已知坡度 $=\dfrac{\text{鉛直上升高度}}{\text{水平移動距離}}\times 100\%$，$A$、$B$、$C$ 三地的海拔高度與水平距離的關係如右圖。若 A 地到 B 地的海拔高度持續上升，坡度爲 8%；B 地到 C 地的海拔高度仍持續上升，坡度爲 6%，則 C 地的海拔高度爲多少公尺？



A 地到 B 地：$\dfrac{\text{鉛直上升高度}}{6000-0}\times 100\%=8\%$，

鉛直上升高度＝480（公尺），

B 地到 C 地：$\dfrac{\text{鉛直上升高度}}{10000-6000}\times 100\%=6\%$，

鉛直上升高度＝240（公尺），

故 C 地的海拔高度爲 $480+240=720$（公尺）。

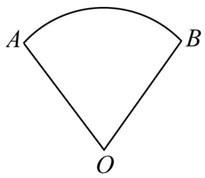
2-1 點、線、圓

1. 圓、圓弧長與扇形

1. 弦：圓周上任意兩點連接所成的線段。
2. 弧：一弦將圓周分成兩部分，兩部分都稱為弧。其中，
   小於半圓的弧稱為劣弧，大於半圓的弧稱為優弧。
3. 弓形：圓上一弦與其所對的弧所圍成的圖形。
4. 圓心角：扇形中兩個半徑的夾角。
5. 扇形：圓的兩條半徑及所夾之弧所圍成的圖形。
6. 扇形面積：圓心角為 x 度，半徑為 r 的扇形面積為 $\pi r^2\times\frac{x}{360}$。
7. 扇形弧長：圓心角為 x 度，半徑為 r 的扇形弧長為 $2\pi r\times\frac{x}{360}$。

1 類題　配合課本 P94 例題 1　扇形圓心角和面積　配合課本 P94 隨堂練習　熟練

如圖，扇形 AOB 中，已知 $\overline{OA}=5$ 公分，且 $\overset{\frown}{AB}$ 的長為 2π，求：



(1) $\angle AOB$。

(2)扇形 AOB 的面積。

解

(1)設 $\angle AOB=x°$，則

扇形弧長 $=2\times\pi\times5\times\frac{x}{360}=2\pi$

得 $x=72$，$\therefore\angle AOB=72°$。

(2)扇形 AOB 的面積 $=\pi\times5^2\times\frac{72}{360}$

$=5\pi$（平方公分）

有一個扇形，其直徑為 12 公分，弧長為 4π 公分，求：

(1)此扇形的圓心角。

(2)此扇形的面積。

解

設圓心角 $x°$

(1) $2\pi\times6\times\frac{x}{360}=4\pi$，$x=120$，

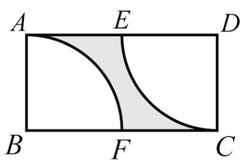
故圓心角為 $120°$。

(2)扇形面積 $=\pi\times6^2\times\frac{120}{360}$

$=12\pi$（平方公分）

2 類題　配合課本 P95 例題 2　扇形的應用　配合課本 P95 隨堂練習　熟練

如圖，長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=4$，且 ABF 與 CDE 皆為扇形，求灰色區域面積。



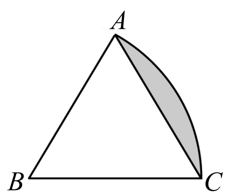
解

灰色區域面積

$=2\times4-\pi\times2^2\times\frac{1}{4}\times2$

$=8-2\pi$

如圖，正三角形 ABC 的邊長為 12，以 B 點為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫 $\overset{\frown}{AC}$，求灰色區域面積。



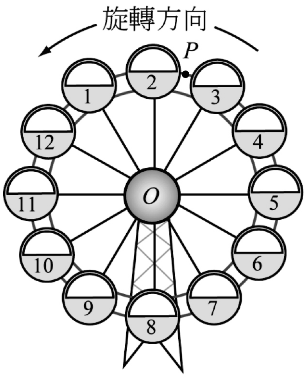
解

灰色區域面積 $=\pi\times12^2\times\frac{60}{360}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times12^2$

$=24\pi-36\sqrt{3}$

3類題 配合課本 P96 例題 3　　**圓弧長的應用**　　配合課本 P96 隨堂練習　熟練

如圖，摩天輪以 O 爲圓心，半徑 $\overline{OP}=16$ 公尺。若以等間隔的方式設置 12 個車廂，車廂依順時針方向分別編號爲 1 號到 12 號，且運行時以逆時針方向等速旋轉。目前 2 號車廂在最高點，則第一次 5 號車廂達到最高點時，P 點所掃過的弧長爲多少公尺？



解

$\because 5-2=3$，

$\therefore$ 需再旋轉 $\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$（圈），

又摩天輪半徑爲 16 公尺，

$\therefore$ 圓周長爲 $2\times\pi\times16=32\pi$（公尺），

故弧長 $=32\pi\times\dfrac{1}{4}=8\pi$（公尺）。

承類題 3，若環繞一圈爲 10 分鐘，則 P 點每分鐘所掃過的弧長是多少公尺？

解

$\because$ 摩天輪半徑爲 16 公尺，

故 P 點環繞一圈的圓周長

$=2\times\pi\times16$

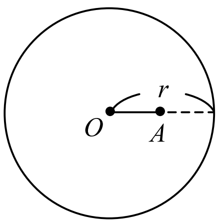
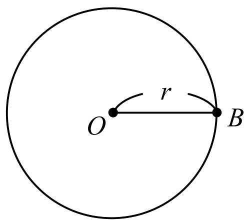
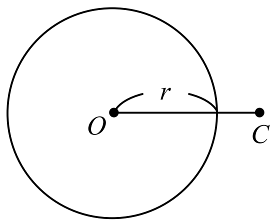
$=32\pi$（公尺），

$\therefore P$ 點每分鐘所掃過的弧長 $=\dfrac{32\pi}{10}$

$=\dfrac{16\pi}{5}$（公尺）

2. 點與圓的位置關係

一個點和圓的位置關係有下列三種：

點與圓的位置關係	在圓內	在圓上	在圓外
圖示			
點到圓心的距離	小於半徑 （$\overline{OA}<r$）	等於半徑 （$\overline{OB}=r$）	大於半徑 （$\overline{OC}>r$）

1 類題 配合課本 P97 隨堂練習　點與圓的位置關係　配合課本 P97 隨堂練習 **熟練**

已知圓 O 半徑為 4，且 A、B、C 三點與圓心 O 的距離分別為 2、4、8，判別 A、B、C 三點與圓 O 的位置關係：

（填入 A、B 或 C）

(1)在圓內的是 A 點。

(2)在圓上的是 B 點。

(3)在圓外的是 C 點。

已知圓 O 直徑為 12，且 D、E、F 三點與圓心 O 的距離分別為 9、6、5，判別 D、E、F 三點與圓 O 的位置關係：

（填入 D、E 或 F）

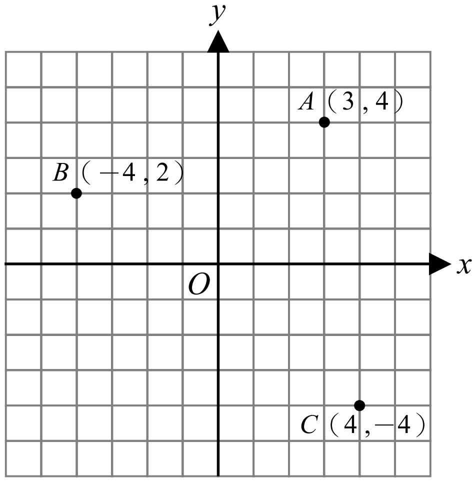
(1)在圓內的是 F 點。

(2)在圓上的是 E 點。

(3)在圓外的是 D 點。

2 類題 配合課本 P98 例題 4　點與圓的位置關係　配合課本 P98 隨堂練習 **熟練**

如圖，坐標平面上三點 $A(3,4)$、$B(-4,2)$、$C(4,-4)$，若以原點 O 為圓心，半徑為 5 畫圓，判別 A、B、C 三點與圓的位置關係。



解

∵$O(0,0)$ 為圓心，由兩點距離公式可知：

(1) $\overline{OA}=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$（半徑）

∴A 點在圓上。

(2) $\overline{OB}=\sqrt{(-4-0)^2+(2-0)^2}$

$=\sqrt{20}<5$（半徑）

∴B 點在圓內。

(3) $\overline{OC}=\sqrt{(4-0)^2+(-4-0)^2}$

$=\sqrt{32}>5$（半徑）

∴C 點在圓外。

在坐標平面上，$A(6,-4)$ 在圓 O 外，$B(-5,4)$ 在圓 O 內，且圓 O 的圓心為原點，若半徑為整數，求圓 O 的半徑。

解

設圓 O 的半徑為 r，

∵A 點在圓外，

∴$\sqrt{(6-0)^2+(-4-0)^2}>r$

$\sqrt{52}>r$

$7.211\cdots\cdots>r$

∵B 點在圓內，

∴$r>\sqrt{(-5-0)^2+(4-0)^2}$

$r>\sqrt{41}$

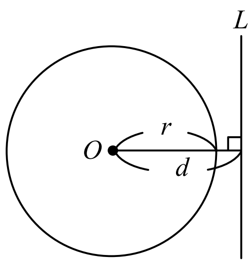
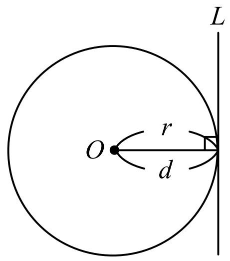
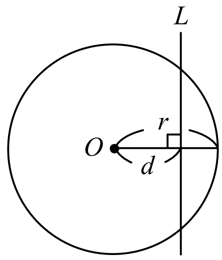
$r>6.403\cdots\cdots$

又半徑為整數，

故圓 O 的半徑 $r=7$。

3. 直線與圓的位置關係

1.在平面上，一個圓與一條直線的位置關係有三種情形，其中以 r 為圓 O 的半徑，d 表示圓心到直線 L 的距離。

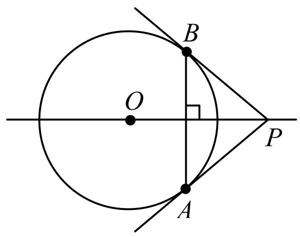
圖示			
圓心到直線的距離	大於半徑（$d>r$）	等於半徑（$d=r$）	小於半徑（$d<r$）
直線與圓的位置關係	不相交（直線 L 與圓 O 的交點數為 0）	交於一點（直線是圓的切線）	交於兩點（直線是圓的割線）

2. 如圖，$\overleftrightarrow{PA}$ 、$\overleftrightarrow{PB}$ 為圓 O 的兩條切線，A、B 為切點，則：

(1) 過圓外一點 P 的兩切線段長相等，即 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 。

(2) $\angle APO=\angle BPO$，即 $\overleftrightarrow{OP}$ 平分 $\angle APB$。

(3) $\overleftrightarrow{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$ 。



3. 弦與弦心距的性質：

(1) 弦的中垂線會通過圓心；通過圓心與弦垂直的直線會平分此弦。

(2) 在同圓或等圓中，若弦心距相等，則所對應的弦等長；
若弦等長，則所對應的弦心距相等。

(3) 在同圓或等圓中，若弦心距愈長，則所對應的弦愈短；
若弦愈短，則所對應的弦心距愈長。

1 類題 配合課本 P100 隨堂練習 **直線與圓的位置關係** 配合課本 P100 隨堂練習 熟練

設有一圓 O，L_1、L_2 和 L_3 三條直線與圓 O 的交點數分別是 0 個、1 個和 2 個，則切線和割線分別是哪一條？

解

$\because L_2$ 與圓 O 有 1 個交點，

$\therefore$ 切線是 L_2。

$\because L_3$ 與圓 O 有 2 個交點，

$\therefore$ 割線是 L_3。

圓 O 的直徑爲 16，若圓心到三條直線 L_1、L_2、L_3 的距離分別爲 16、8、4，則切線和割線分別是哪一條？

解

圓 O 的直徑爲 16，$\therefore$ 半徑爲 8，

又圓心到 L_1 的距離爲 $16>$ 半徑，

圓心到 L_2 的距離爲 $8=$ 半徑，

圓心到 L_3 的距離爲 $4<$ 半徑，

故 L_2 是切線，L_3 是割線。

即時演練

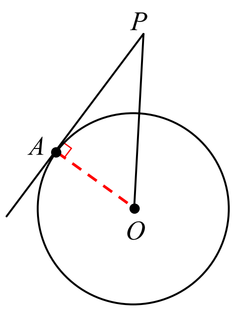
已知圓 O 的半徑爲 6，且 L_1 爲圓 O 的割線，則圓心到 L_1 的距離可能爲下列何者？

(A) 3 (B) 6 (C) 8 (D) 12

(A)

2 類題 配合課本 P101 例題 5 **求切線段長** 配合課本 P101 隨堂練習 熟練

如圖，$\overleftrightarrow{PA}$ 與圓 O 切於 A 點，已知圓 O 的半徑爲 6，$\overline{PA}=10$，求 $\overline{PO}$。



解

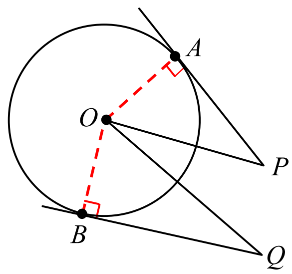
連接 $\overline{OA}$，

則 $\overline{OA}\perp\overline{PA}$，

故△OPA 爲直角三角形，

$\overline{PO}=\sqrt{10^2+6^2}=2\sqrt{34}$。

如圖，$\overleftrightarrow{PA}$ 與圓 O 切於 A 點，$\overleftrightarrow{QB}$ 與圓 O 切於 B 點，已知 $\overline{PA}=8$，$\overline{PO}=10$，$\overline{OQ}=12$，求 $\overline{BQ}$。



解

連接 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$，

則 $\overline{OA}\perp\overline{PA}$、$\overline{OB}\perp\overline{BQ}$，

$\therefore\overline{OA}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，

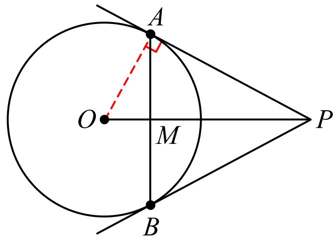
即圓 O 的半徑爲 6，

$\overline{BQ}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$。

3 類題　過圓外一點的切線應用

配合課本 P103 例題 6　　配合課本 P103 隨堂練習　　熟練

如圖，$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$ 切圓 O 於 A、B 兩點，$\overline{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 M 點，若 $\overline{OP}=17$，$\overline{AP}=15$，求 $\overline{AB}$。



解

連接 $\overline{OA}$，$\because \overleftrightarrow{PA}$ 切圓 O 於 A 點，

$\therefore \angle OAP=90^\circ$，則 $\triangle OAP$ 為直角三角形，

$\overline{OA}=\sqrt{17^2-15^2}=8$，

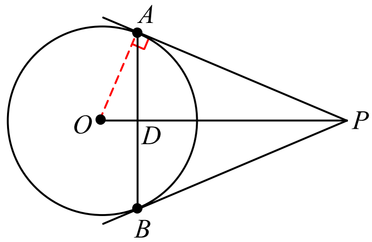
又 $\overline{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$，

$\therefore \overline{AM}$ 為直角三角形 OAP 斜邊上的高，

故 $\overline{AM}=\dfrac{\overline{OA}\times\overline{AP}}{\overline{OP}}=\dfrac{8\times15}{17}=\dfrac{120}{17}$，

因此 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\times\dfrac{120}{17}=\dfrac{240}{17}$。

如圖，$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$ 切圓 O 於 A、B 兩點，$\overline{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 相交於 D 點，若圓 O 的半徑為 5，$\overline{AP}=12$，求 $\overline{AB}$。



解

連接 $\overline{OA}$，$\because \overleftrightarrow{PA}$ 切圓 O 於 A 點，

$\therefore \angle OAP=90^\circ$，則 $\triangle OAP$ 為直角三角形，

$\overline{OP}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，

$\because \overline{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$，

$\therefore \overline{AD}$ 為直角三角形 OAP 斜邊上的高，

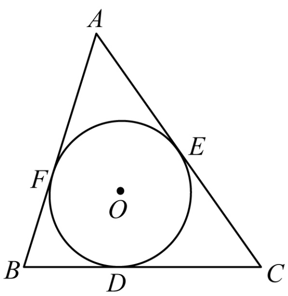
故 $\overline{AD}=\dfrac{\overline{OA}\times\overline{AP}}{\overline{OP}}=\dfrac{5\times12}{13}=\dfrac{60}{13}$，

因此 $\overline{AB}=2\overline{AD}=2\times\dfrac{60}{13}=\dfrac{120}{13}$。

4 類題　切線段的應用

配合課本 P104 例題 7　　配合課本 P104 隨堂練習　　熟練

如圖，$\triangle ABC$ 三邊分別與圓 O 相切於 D、E、F 三點，已知 $\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=7$，求 $\overline{AF}$。



解

$\because$ 圓外一點到此圓的兩切線段長相等，

$\therefore$ 可設 $\overline{AF}=\overline{AE}=x$，

則 $\overline{BF}=\overline{BD}=6-x$，$\overline{CE}=\overline{CD}=7-x$。

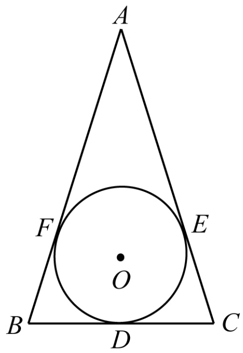
$\because \overline{BD}+\overline{CD}=\overline{BC}=5$

$(6-x)+(7-x)=5$

$x=4$

即 $\overline{AF}=4$。

如圖，$\triangle ABC$ 三邊分別與圓 O 相切於 D、E、F 三點，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}=17$，$\overline{BC}=10$，求 $\overline{BD}$。



解

$\because$ 圓外一點到此圓的兩切線段長相等，

$\therefore$ 可設 $\overline{AF}=\overline{AE}=x$，

則 $\overline{BF}=\overline{BD}=17-x$，$\overline{CE}=\overline{CD}=17-x$。

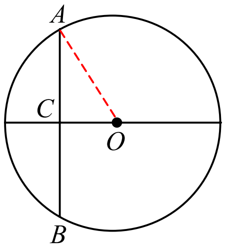
$\because \overline{BD}+\overline{CD}=\overline{BC}=10$

$(17-x)+(17-x)=10$

$x=12$

即 $\overline{BD}=17-12=5$。

如圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的一弦，若 $\overline{AB}=12$，圓 O 的半徑為 8，求弦心距 $\overline{OC}$。



解

連接 $\overline{OA}$，

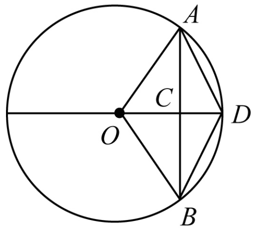
$\because$ $\overline{OC}$ 為 $\overline{AB}$ 的弦心距，

$\therefore$ $\overline{OC}$ 垂直平分弦 $\overline{AB}$。

$\overline{AC}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times12=6$

$\overline{OC}=\sqrt{8^2-6^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

如圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的一弦，若 $\overline{AB}$ 的弦心距為 3，圓 O 的半徑為 5，求 $\overline{AD}$。



解

$\because$ $\overline{OC}$ 為 $\overline{AB}$ 的弦心距，

$\therefore$ $\overline{OD}$ 垂直平分弦 $\overline{AB}$，

$\overline{AC}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

$\overline{CD}=5-3=2$，

故 $\overline{AD}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$。

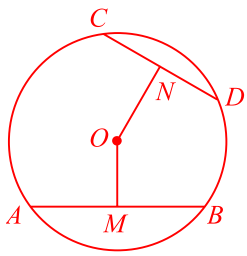
即時演練

1. 已知圓 O 的半徑為 10，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 分別為圓 O 上的兩弦，$\overline{OM}$、$\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的弦心距，若 $\overline{OM}=6$，$\overline{ON}=8$，比較 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的大小關係。

   如圖，

   $\because$ $\overline{OM}<\overline{ON}$，

   由大弦心距對小弦可知 $\overline{AB}>\overline{CD}$。



2. 圓 O 與圓 O' 為半徑相等的兩圓，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 分別為圓 O、圓 O' 上的兩弦，$\overline{OM}$ 為 $\overline{AB}$ 的弦心距，$\overline{O'N}$ 為 $\overline{CD}$ 的弦心距，回答下列問題，並填入 >、=、<：

   (1)若 $\overline{OM}=8$，$\overline{O'N}=8$，則 $\overline{AB}$ ___=___ $\overline{CD}$。

   (2)若 $\overline{OM}=8$，$\overline{O'N}=5$，則 $\overline{AB}$ ___<___ $\overline{CD}$。

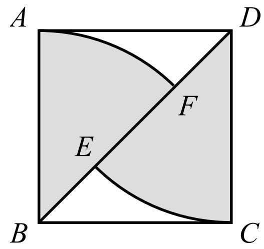
   (3)若 $\overline{AB}=14$，$\overline{CD}=14$，則 $\overline{OM}$ ___=___ $\overline{O'N}$。

   (4)若 $\overline{AB}=14$，$\overline{CD}=18$，則 $\overline{OM}$ ___>___ $\overline{O'N}$。

2-1 自我磨練

配合課本 P111～113 自我評量

1. 如圖，$ABCD$ 為邊長 8 公分的正方形，且 ABF 與 CDE 皆為扇形，求灰色區域面積。

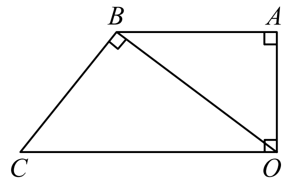


灰色區域面積$=\pi\times8^2\times\dfrac{45}{360}\times2=16\pi$（平方公分）

2. 如圖，四邊形 $OABC$ 中，$\angle A=\angle AOC=\angle CBO=90°$，$\overline{AB}=\overline{BC}=8$，$\overline{AO}=6$，回答下列問題：

(1)求$\overline{OC}$。

(2)若以 O 為圓心，10 為半徑畫圓，則 A、B、C 三點會分別落在圓內、圓上或圓外？



(1) $\overline{OB}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

$\overline{OC}=\sqrt{10^2+8^2}=2\sqrt{41}$。

(2) $\overline{OA}=6<$半徑，則 A 點在圓內。

$\overline{OB}=10=$半徑，則 B 點在圓上。

$\overline{OC}=2\sqrt{41}>$半徑，則 C 點在圓外。

3. 若圓 O 的直徑為 12，圓心到三條直線 L_1、L_2、L_3 的距離分別為 8、6、5，回答下列問題：

(1)這三條直線當中，哪一條是切線？哪一條是割線？

(2)已知直線 K 與圓交於兩點，且 $K\,//\,L_1$，直線 K 和直線 L_1 的距離為 5，求圓心到直線 K 的距離。

(1)圓 O 的直徑為 12，∴半徑為 6，

又圓心到 L_1 的距離為 $8>$半徑，

圓心到 L_2 的距離為 $6=$半徑，

圓心到 L_3 的距離為 $5<$半徑，

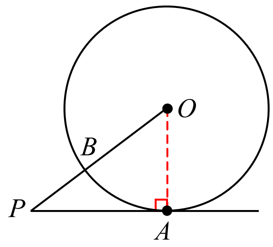
故 L_2 是切線，L_3 是割線。

(2)∵直線 K 與圓 O 交於兩點，

∴直線 K 為割線，

故圓心到直線 K 的距離為 $8-5=3$。

4. 如圖，$\overleftrightarrow{PA}$ 與圓 O 切於 A 點，若 $\overline{PB}=6$，$\overline{PA}=12$，求圓 O 的半徑。



連接 $\overline{OA}$，則 $\overline{OA}\perp\overline{PA}$，

設圓 O 的半徑為 x，則 $\overline{PO}=x+6$，

$\because \triangle OPA$ 為直角三角形，

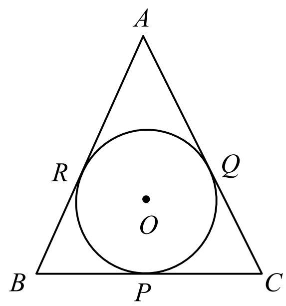
$\therefore \overline{PO}^2=\overline{PA}^2+\overline{OA}^2$

$(x+6)^2=12^2+x^2$

$x^2+12x+36=144+x^2$

$x=9$。

5. 如圖，等腰三角形 ABC 與圓 O 相切於 P、Q、R 三點，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}=7$，$\overline{BC}=4$，求 $\overline{CP}$。



$\because$ 圓外一點到此圓的兩切線段長相等，

$\therefore$ 設 $\overline{AR}=\overline{AQ}=x$，

則 $\overline{BR}=\overline{BP}=7-x$，$\overline{CP}=\overline{CQ}=7-x$。

$\because \overline{BP}+\overline{CP}=\overline{BC}=4$

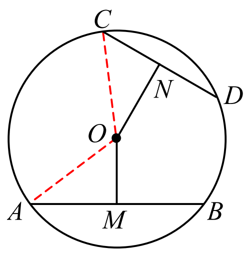
$\therefore (7-x)+(7-x)=4$

$14-2x=4$

$x=5$

即 $\overline{CP}=7-5=2$。

6. 如圖，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 分別為圓 O 的兩弦，$\overline{OM}$、$\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的弦心距，若 $\overline{AB}=16$，$\overline{CD}=12$，$\overline{AB}$ 的弦心距為 6，求 $\overline{CD}$ 的弦心距。



連接 $\overline{OA}$、$\overline{OC}$，

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 16=8$，

$\overline{OC}=\overline{OA}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

$\overline{CN}=\frac{1}{2}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times 12=6$，

$\overline{ON}=\sqrt{10^2-6^2}=8$。

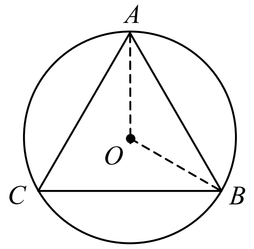
2-2 圓心角與圓周角

1.圓心角與弧的度數

1. 弧的度數就是該弧所對圓心角的度數。
2. 在同圓或等圓中，度數相等的兩弧等長；若兩弧等長，則它們所對的圓心角也相等。
3. 在同圓或等圓中，若兩圓心角相等，則它們所對的弦等長；
   若兩弦等長，則它們所對的圓心角相等。
4. 在同圓或等圓中，若兩弧的度數相等，則它們所對的弦等長；
   若兩弦等長，則它們所對的弧度數相等。

1類題 配合課本 P116 例題 1　弧的度數　配合課本 P116 隨堂練習　**熟練**

如圖，正三角形 ABC 的頂點均在圓 O 上，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數。



解

$\because \triangle ABC$ 爲正三角形，

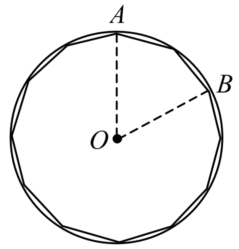
$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$，

可得 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}$，

故 $\overset{\frown}{AB}=\dfrac{360^\circ}{3}$

$=120^\circ$。

如圖，有一正十二邊形的所有頂點均在圓 O 上，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數。



解

$\because$ 正十二邊形的邊長都相等，

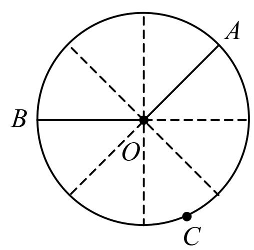
$\therefore$ 所對的弧也會等長，

故 $\overset{\frown}{AB}=360^\circ\times\dfrac{2}{12}$

$=60^\circ$。

即時演練

如圖，將一圓分成 8 等分，求 $\overset{\frown}{ACB}$ 的度數。

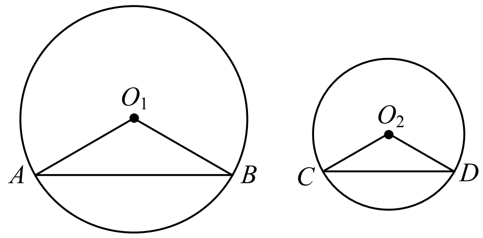


$\overset{\frown}{ACB}$ 的度數 $=\angle AOB$

$=360^\circ\times\dfrac{5}{8}$

$=225^\circ$

如圖，圓 O_1 的半徑為 6、圓 O_2 的半徑為 4，若 $\angle AO_1B = \angle CO_2D = 120°$，求：



(1) $\overset{\frown}{AB}$ 的長度：$\overset{\frown}{CD}$ 的長度。

(2) $\overline{AB}$ ：$\overline{CD}$ 。

解

(1) $\overset{\frown}{AB}$ 的長度：$\overset{\frown}{CD}$ 的長度

$=(2\times6\times\pi\times\dfrac{120}{360}):(2\times4\times\pi\times\dfrac{120}{360})$

$=3:2$。

(2)在 $\triangle AO_1B$ 與 $\triangle CO_2D$ 中，

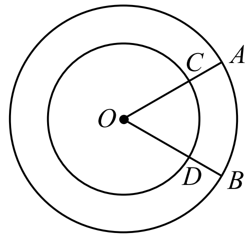
$\because \angle AO_1B = \angle CO_2D = 120°$，

$\overline{O_1A}:\overline{O_2C}=\overline{O_1B}:\overline{O_2D}=6:4=3:2$，

$\therefore \triangle AO_1B \sim \triangle CO_2D$（$SAS$ 相似性質），

故 $\overline{AB}:\overline{CD}=3:2$。

如圖，兩同心圓中，已知 $\overset{\frown}{AB}$ 的長度為 6π，$\overset{\frown}{CD}$ 的長度為 4π，大圓的半徑為 18，求小圓的半徑。



解

設小圓的半徑為 r，

$\because \angle AOB = \angle COD$，

$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 的長度：$\overset{\frown}{CD}$ 的長度

$=$大圓的半徑：小圓的半徑

$6\pi:4\pi=18:r$

$r=12$

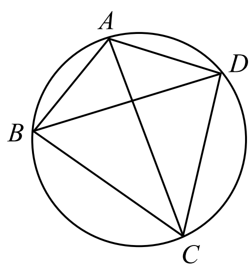
故小圓的半徑為 12。

2. 圓周角及其所對的弧

1. 一弧所對的圓周角度數等於該弧度數的一半，也是該弧所對圓心角度數的一半。
2. 同一個圓中，一弧所對的所有圓周角的度數都相等。
3. 半圓所對的圓周角是直角。
4. 若兩條直線平行，則此兩條平行線在圓上所截出的兩弧度數相等。

即時演練

如圖，$\overset{\frown}{CD}$ 所對的圓周角有哪些？

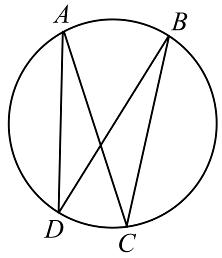


$\angle CAD$、$\angle CBD$。

1 類題

配合課本 P120 例題 3　**由弧的度數求圓周角**　配合課本 P120 隨堂練習　熟練

如圖，已知 $\overset{\frown}{AB}$ 的長是圓周長的 $\frac{1}{6}$，求 $\angle ACB$ 與 $\angle ADB$。



解

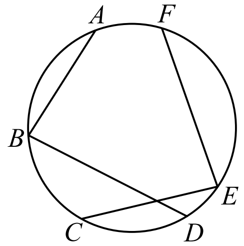
$\because \overset{\frown}{AB}$ 的長是圓周長的 $\frac{1}{6}$，

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\frac{1}{6}\times 360°=60°$，

又 $\angle ACB$ 和 $\angle ADB$ 均為 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角，

$\therefore \angle ACB=\angle ADB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\times 60°=30°$

如圖，A、B、C、D、E、F 為圓上六個點，已知 $\overset{\frown}{AF}=38°$，$\overset{\frown}{CD}=62°$，則 $\angle B+\angle E=$？



解

$\angle B=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{ED})$

$\angle E=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{FA}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC})$

$\angle B+\angle E=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AF}+360°-\overset{\frown}{CD})$

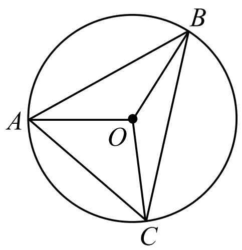
$=\frac{1}{2}(38°+360°-62°)$

$=168°$

2 類題

配合課本 P121 例題 4　**由圓周角求弧的度數**　配合課本 P121 隨堂練習　熟練

如圖，$\triangle ABC$ 的頂點均在圓 O 上，已知 $\angle ACB=60°$，$\angle ABC=50°$，求 $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{BC}$。



解

$\because \angle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$，

$\therefore \overset{\frown}{AB}=2\angle ACB=2\times 60°=120°$，

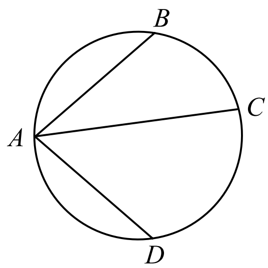
又 $\angle BAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$，

$\therefore \overset{\frown}{BC}=2\angle BAC$

$=2\times(180°-60°-50°)$

$=140°$

如圖，A、B、C、D 為圓上四個點，已知 $\angle BAC=35°$，$\overset{\frown}{BCD}=170°$，求 $\overset{\frown}{CD}$。



解

$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BCD}-\overset{\frown}{BC}$

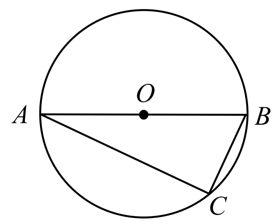
$=170°-2\angle BAC$

$=170°-2\times 35°$

$=100°$

即時演練

1. 如圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑，已知 $\angle ABC=65°$，求 $\overset{\frown}{BC}$。



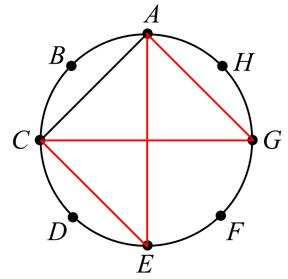
$\because$ $\overline{AB}$ 為直徑，

$\therefore$ $\angle ACB=90°$，

又 $\angle BAC=90°-65°=25°$，

故 $\overset{\frown}{BC}=2\angle BAC=2\times25°=50°$。

2. 如圖，A、B、C、D、E、F、G、H 為圓上八個等分點，請作出所有以 $\overline{AC}$ 為一邊，且頂點皆在圓上的直角三角形。



連接 $\overline{AE}$、$\overline{CE}$，

$\because$ $\overline{AE}$ 為直徑，

$\therefore$ $\triangle ACE$ 為直角三角形。

連接 $\overline{AG}$、$\overline{CG}$，

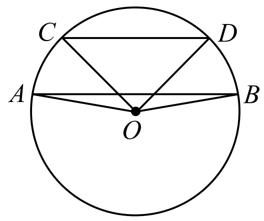
$\because$ $\overline{CG}$ 為直徑，

$\therefore$ $\triangle ACG$ 為直角三角形。

3 類題　平行線截等弧

配合課本 P123 例題 5

如圖，A、B、C、D 為圓上四點，已知 $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，說明 $\angle AOC=\angle BOD$。



解

$\because$ $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，

$\therefore$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，

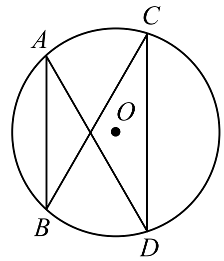
又 $\angle AOC=\overset{\frown}{AC}$，

$\angle BOD=\overset{\frown}{BD}$，

故 $\angle AOC=\angle BOD$。

配合課本 P123 隨堂練習　熟練

如圖，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 為圓 O 的兩弦，若 $\angle BCD=\angle ADC$，$\angle BAD=30°$，求 $\angle ABC$。



解

$\because$ $\angle BCD=\angle ADC$，

$\therefore$ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}$，

又 $\angle ABC=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BD}=\angle BAD$，

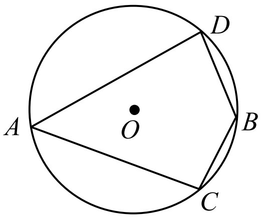
故 $\angle ABC=30°$。

3.圓內接四邊形

圓內接四邊形對角互補。

1 類題 配合課本 P124 例題 6 **圓內接四邊形對角互補** 配合課本 P125 隨堂練習 **熟練**

如圖，四邊形 $ACBD$ 爲圓 O 的內接四邊形，已知 $\angle D=80°$，$\angle A=\frac{1}{2}\angle C$，求 $\angle B$。



解

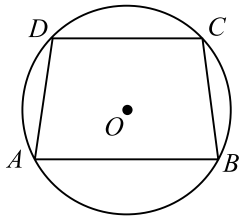
$\because$ 圓內接四邊形對角互補，

$\therefore \angle C=180°-\angle D=180°-80°=100°$

又 $\angle A=\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}\times 100°=50°$，

故 $\angle B=180°-50°=130°$。

如圖，四邊形 $ABCD$ 爲圓 O 的內接四邊形，已知 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$，$\angle A=80°$，求 $\angle C$ 和 $\angle D$。



解

$\because \overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$，且 $\angle A=80°$，

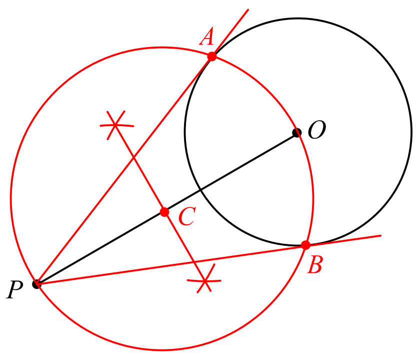
$\therefore \angle D=180°-80°=100°$，

又四邊形 $ABCD$ 爲圓 O 的內接四邊形，

$\therefore \angle C=180°-\angle A=180°-80°=100°$

2 類題 配合課本 P127 例題 7 **過圓外一點作圓的切線** 配合課本 P127 隨堂練習 **熟練**

如圖，P 爲圓 O 外的一點，利用尺規作圖，畫出通過 P 點且與圓 O 相切的直線。



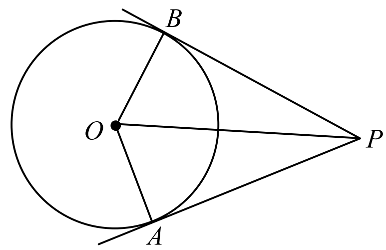
解

(1)以 $\overline{OP}$ 爲直徑，作圓 C，
交圓 O 於 A、B 兩點。

(2)連接 $\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$。

(3) $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 即爲所求。

如圖，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 是 P 點到圓 O 的兩條切線，已知圓 O 的半徑長爲 $2\sqrt{3}$，$\overline{OP}=4\sqrt{3}$，$\overparen{AB}=120°$，求：



(1) $\angle AOB$。

(2)切線長 $\overline{PB}$。

解

(1) $\angle AOB=\overparen{AB}=120°$。

(2) $\overline{PB}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OB}^2}$

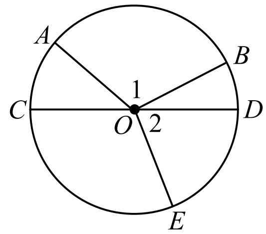
$=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}$

$=6$

2-2 自我磨練

配合課本 P129～131 自我評量

1. 如圖，$\overline{CD}$ 為圓 O 的直徑，已知 $\overparen{AB}=125°$，$\overparen{CE}=108°$，求 $\angle 1$ 和 $\angle 2$。



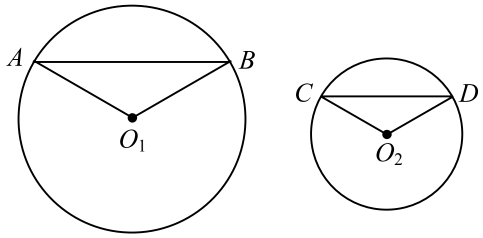
$\angle 1=\overparen{AB}=125°$。

$\angle 2=\overparen{DE}=180°-108°=72°$。

2. 如圖，圓 O_1 的半徑為 10、圓 O_2 的半徑為 6，若 $\angle AO_1B=\angle CO_2D$，回答下列問題：

(1) $\overparen{AB}$ 的長度：$\overparen{CD}$ 的長度。

(2) $\overline{AB}:\overline{CD}$。



(1)設 $\angle AO_1B=\angle CO_2D=x°$

$\therefore \overparen{AB}$ 的長度：$\overparen{CD}$ 的長度

$=(2\times 10\times \pi\times \frac{x}{360}):(2\times 6\times \pi\times \frac{x}{360})$

$=5:3$。

(2)在 $\triangle AO_1B$ 與 $\triangle CO_2D$ 中，

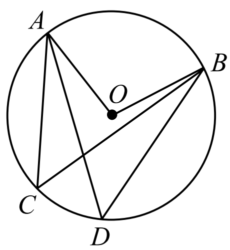
$\because \angle AO_1B=\angle CO_2D$，

$\overline{O_1A}:\overline{O_2C}=\overline{O_1B}:\overline{O_2D}=10:6=5:3$，

$\therefore \triangle AO_1B\sim\triangle CO_2D$（$SAS$ 相似性質），

故 $\overline{AB}:\overline{CD}=5:3$。

3. 如圖，若 $\overparen{AB}$ 的長度為圓 O 周長的 $\frac{5}{18}$，求 $\angle AOB$、$\angle C$ 和 $\angle D$。

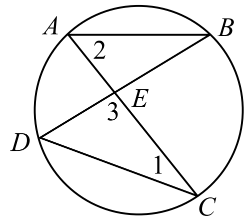


$\overparen{AB}$ 的度數 $=360°\times\frac{5}{18}=100°$，

$\angle AOB=\overparen{AB}=100°$，

$\angle C=\angle D=\frac{1}{2}\overparen{AB}=\frac{1}{2}\times 100°=50°$。

4. 如圖，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 兩弦相交於圓內一點 E，若 $\angle ABD=30°$，$\overset{\frown}{BC}=100°$，求 $\angle 1$、$\angle 2$ 及 $\angle 3$。



$\angle 2=\angle BDC=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=\dfrac{1}{2}\times 100°=50°$，

$\angle 1=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AD}=\angle ABD=30°$，

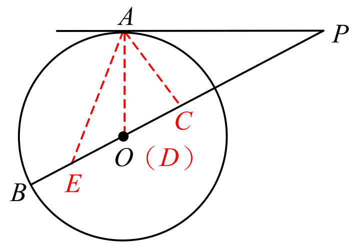
$\angle 3=180°-30°-50°=100°$。

5. 如圖，$\overleftrightarrow{PA}$ 與圓 O 切於 A 點，圓心在 $\overline{BP}$ 上，回答下列問題：

(1)在 $\overline{BP}$ 上找到一點 C，使得 $\angle PAC$ 爲銳角。

(2)在 $\overline{BP}$ 上找到一點 D，使得 $\angle PAD$ 爲直角。

(3)在 $\overline{BP}$ 上找到一點 E，使得 $\angle PAE$ 爲鈍角。

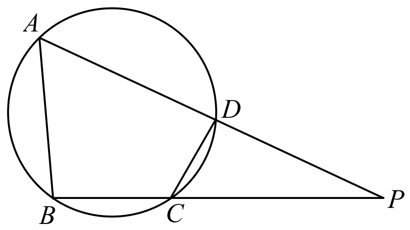


(1) $\overline{OP}$ 上任一點。

(2)即 O 點。

(3) $\overline{OB}$ 上任一點。

6. 如圖，四邊形 $ABCD$ 爲圓內接四邊形，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 交於 P 點，若 $\angle BAD=60°$，$\angle CPD=25°$，求 $\angle PDC$。



∵四邊形 $ABCD$ 爲圓內接四邊形，

∴ $\angle BAD+\angle BCD=180°$，

$\angle BCD=180°-\angle BAD=180°-60°=120°$，

又 $\angle BCD$ 爲 $\triangle CDP$ 的外角，

故 $\angle PDC=\angle BCD-\angle CPD=120°-25°=95°$。

3-1 推理證明

1. 幾何證明

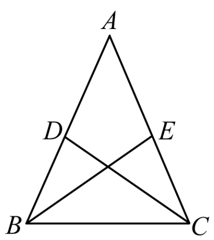
1. 在解題完成後，嘗試說明每個步驟的合理性，這個說明的過程就是證明。
2. 推理與證明：(1)將「題目所給的條件」寫在 已知 。
   (2)將「要說明的結論」寫在 求證 。
   (3)將「推導或說明的過程」寫在 證明 。
3. 推理證明的思考與分析，可先從「結論」推論到「題目所給的條件」，但在寫作推理的過程中，則是依據分析的結果，由「題目所給的條件」逐步推理至「結論」。

結論 $\xrightarrow{\text{思路分析}}$ 題目所給的條件

結論 $\xleftarrow[\text{推理過程（證明）}]{}$ 題目所給的條件

1 類題 配合課本 P140 例題 1　等腰三角形兩底角上的角平分線等長　配合課本 P141 隨堂練習 **熟練**

已知 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BE}$ 平分 $\angle ABC$，$\overline{CD}$ 平分 $\angle ACB$。



求證 $\overline{BE}=\overline{CD}$。

證明 在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ACD$ 中，

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$（已知），

$\angle ABE=\dfrac{1}{2}\angle ABC$

$=\dfrac{1}{2}\angle ACB$

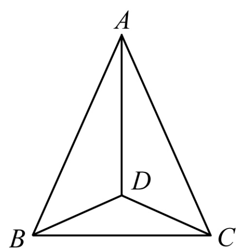
$=\angle ACD$

$\angle A=\angle A$（公用角），

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACD$（$ASA$ 全等性質），

故 $\overline{BE}=\overline{CD}$。

已知 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$。



求證 $\angle BAD=\angle CAD$。

證明 在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 中，

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$（已知），

$\overline{BD}=\overline{CD}$（已知），

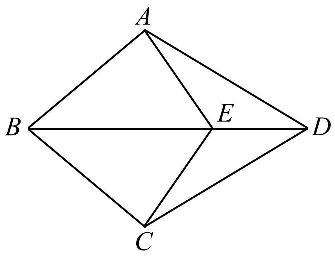
$\overline{AD}=\overline{AD}$（公用邊），

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$（$SSS$ 全等性質），

故 $\angle BAD=\angle CAD$（對應角相等）。

2 類題 | 配合課本 P142 例題 2 | 全等證明 | 配合課本 P143 隨堂練習 | 熟練

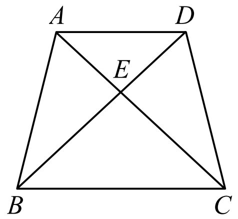
如圖，$\triangle ABD$ 與 $\triangle CBD$ 中，
$\angle BAD=\angle BCD$，$\angle ABD=\angle CBD$，
若 E 為 $\overline{BD}$ 上任一點，求證：
(1) $\overline{AB}=\overline{CB}$。
(2) $\overline{AE}=\overline{CE}$。



解

(1)在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CBD$ 中，
$\because \angle BAD=\angle BCD$，
$\angle ABD=\angle CBD$，
$\overline{BD}=\overline{BD}$，
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$（$AAS$ 全等性質），
故 $\overline{AB}=\overline{CB}$（對應邊相等）。
(2)在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle CBE$ 中，
$\because \overline{AB}=\overline{CB}$，
$\angle ABE=\angle CBE$，
$\overline{BE}=\overline{BE}$，
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBE$（$SAS$ 全等性質），
故 $\overline{AE}=\overline{CE}$（對應邊相等）。

如圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{DC}$，
$\angle ABC=\angle DCB$，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於
E 點，求證：
(1) $\angle BAC=\angle CDB$。
(2) $\overline{AE}=\overline{DE}$。

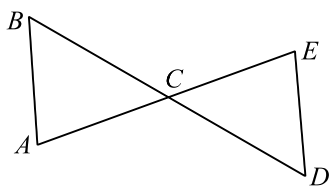


解

(1)在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DCB$ 中，
$\because \overline{AB}=\overline{DC}$，
$\angle ABC=\angle DCB$，
$\overline{BC}=\overline{BC}$，
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$（$SAS$ 全等性質），
故 $\angle BAC=\angle CDB$（對應角相等）。
(2)在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle DCE$ 中，
$\because \overline{AB}=\overline{DC}$，
$\angle BAE=\angle CDE$，
$\angle AEB=\angle DEC$，
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCE$（$AAS$ 全等性質），
故 $\overline{AE}=\overline{DE}$（對應邊相等）。

即時演練

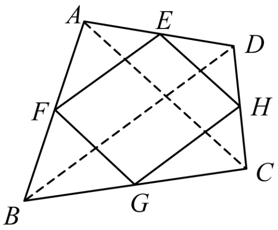
如圖，$\overline{AE}$、$\overline{BD}$ 互相平分於 C 點，求證 $\angle BAC=\angle CED$。



$\because \overline{AE}$、$\overline{BD}$ 互相平分，
$\therefore \overline{AC}=\overline{CE}$，$\overline{BC}=\overline{CD}$，
在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle EDC$ 中，
$\because \overline{AC}=\overline{CE}$，$\angle ACB=\angle ECD$，$\overline{BC}=\overline{CD}$，
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDC$（$SAS$ 全等性質），
故 $\angle BAC=\angle CED$（對應角相等）。

3 類題　配合課本 P144 例題 3　平行四邊形的應用

如圖，四邊形 $ABCD$ 中，已知 E、F、G、H 爲各邊的中點，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 爲對角線，求證：四邊形 $EFGH$ 爲平行四邊形。



解

在△ABD 中，

∵E、F 爲 $\overline{AD}$ 、$\overline{AB}$ 的中點，

∴ $\overline{EF} \,//\, \overline{BD}$，$\overline{EF}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$。

在△CBD 中，

∵G、H 爲 $\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 的中點，

∴ $\overline{GH} \,//\, \overline{BD}$，$\overline{GH}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$。

因此 $\overline{EF} \,//\, \overline{GH} \,//\, \overline{BD}$，$\overline{EF}=\overline{GH}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$，

故四邊形 $EFGH$ 爲平行四邊形

（一雙對邊平行且相等）。

配合課本 P144 隨堂練習　熟練

承類題 3，求證：

▱$EFGH$ 的周長＝$\overline{BD}+\overline{AC}$ 。

解

∵ $\overline{EF}=\overline{GH}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$，

同理 $\overline{FG}=\overline{EH}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$，

故▱$EFGH$ 的周長

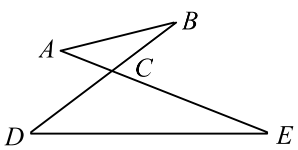
$=2(\overline{EF}+\overline{FG})$

$=2(\dfrac{1}{2}\overline{BD}+\dfrac{1}{2}\overline{AC})$

$=\overline{BD}+\overline{AC}$。

4 類題　配合課本 P145 例題 4　相似形的應用

如圖，$\overline{AE}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 C 點，若 $\overline{AB}=14$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=10$，$\overline{CE}=20$，$\overline{CD}=12$，求證：△ABC～△DEC。



解

在△ABC 與△DEC 中，

∵ $\overline{BC}:\overline{CE}=10:20=1:2$，

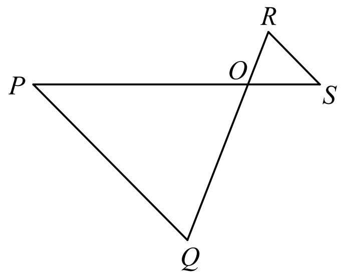
$\overline{AC}:\overline{CD}=6:12=1:2$，

$\angle ACB=\angle DCE$（對頂角相等），

∴△ABC～△DEC（SAS 相似性質）。

配合課本 P145 隨堂練習　熟練

如圖，$\overline{PS}$ 與 $\overline{QR}$ 交於 O 點，$\overline{OP}=3\overline{OS}$，$\overline{OQ}=3\overline{OR}$，求證：$\overline{PQ}=3\overline{RS}$。



解

在△OPQ 與△OSR 中，

∵ $\overline{OP}=3\overline{OS}$，$\overline{OQ}=3\overline{OR}$，

$\angle POQ=\angle SOR$（對頂角相等），

∴△OPQ～△OSR（SAS 相似性質），

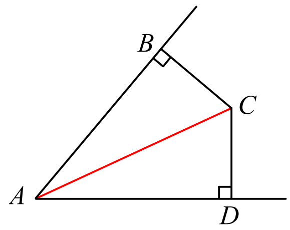
故 $\overline{PQ}=3\overline{RS}$（對應邊成比例）。

2. 輔助線

1. 幾何推理進行中，有時需要在原圖形上添加一些線條或圖形，協助進行推理證明或計算，這種添加的線條或圖形就稱為輔助線。
2. 不同的思路會產生不同的輔助線畫法與證法。

1 類題 配合課本 P147 例題 5　輔助線的應用　配合課本 P147 隨堂練習 **熟練**

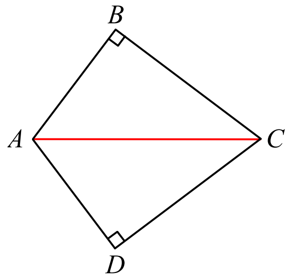
如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{BC}=\overline{CD}$，$\overline{BC}\perp\overline{AB}$，$\overline{CD}\perp\overline{AD}$，求證 $\overline{AB}=\overline{AD}$。



解

連接 $\overline{AC}$，
在△ABC 與△ADC 中，
∵ $\overline{BC}=\overline{CD}$，$\angle ABC=\angle ADC=90°$，
$\overline{AC}=\overline{AC}$，
∴△$ABC\cong$△ADC（RHS 全等性質），
故 $\overline{AB}=\overline{AD}$（對應邊相等）。

如圖，四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}=\overline{AD}=6$，$\overline{CD}=8$，$\angle B=\angle D=90°$，求四邊形 $ABCD$ 的面積。

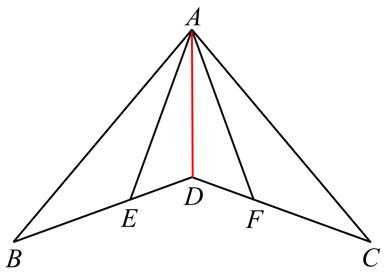


解

連接 $\overline{AC}$，
在△ABC 與△ADC 中，
∵ $\overline{AB}=\overline{AD}$，$\angle B=\angle D=90°$，$\overline{AC}=\overline{AC}$，
∴△$ABC\cong$△ADC（RHS 全等性質），
故四邊形 $ABCD$ 的面積為
$(6\times8\div2)\times2=48$

即時演練

如圖，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$，$\angle BAE=\angle CAF$，求證：
(1) $\angle ABE=\angle ACF$。
(2) $\overline{AE}=\overline{AF}$。



(1)連接 $\overline{AD}$，
在△ABD 與△ACD 中，
∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{AD}$，
∴△$ABD\cong$△ACD（SSS 全等性質），
故 $\angle ABE=\angle ACF$（對應角相等）。
(2)在△ABE 與△ACF 中，
∵ $\angle BAE=\angle CAF$，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle ABE=\angle ACF$，
∴△$ABE\cong$△ACF（ASA 全等性質），
故 $\overline{AE}=\overline{AF}$（對應邊相等）。

3. 代數證明

偶數能被 2 整除，可以表示成 $2k$ 的形式；奇數被 2 除都餘 1，可以表示成 $2k+1$ 的形式，其中 k 為整數。

即時演練

1. 假設 a、b 均為整數，寫出下列何者為奇數，何者為偶數。
   (1) $2(a+15)$ 為__偶__數。
   (2) $2(a+8)+1$ 為__奇__數。
   (3) $4(b+15)$ 為__偶__數。
   (3) $4(b+15)=2(2b+30)$，故為偶數。

2. 假設 x、y 均為整數，填入適當的式子，並寫出下列何者為奇數，何者為偶數。
   (1) $12x+1=2\times$__$6x$__$+1$；故為__奇__數。
   (2) $6x+16=2\times$__$(3x+8)$__；故為__偶__數。
   (3) $8y-4=2\times$__$(4y-2)$__；故為__偶__數。

1 類題 配合課本 P150 例題 6　**奇偶數的判別**　配合課本 P150 隨堂練習 **熟練**

已知 $1^2+2\times1=3$，$3^2+2\times3=15$，$5^2+2\times5=35$，由這三個例子猜測「一個奇數的平方，加上此奇數的 2 倍，還是奇數。」這個猜測正確嗎？

已知　a 是奇數。

求證　a^2+2a 也是奇數。

證明　$\because$ a 是奇數，設 $a=2n+1$，n 是整數，

$\therefore a^2+2a=(2n+1)^2+2(2n+1)$
$=4n^2+8n+3$
$=2(2n^2+4n+1)+1$

$\because$ $2n^2+4n+1$ 為整數，

故 a^2+2a 是奇數。

「任一個奇數乘以任意另一個奇數」你會猜測得到奇數還是偶數呢？根據結論證明你的猜測是正確的。

已知　a、b 皆為奇數。

求證　$a\times b$ 是__奇數__（填偶數或奇數）。

證明　$\because$ a、b 皆為奇數，

$\therefore$ 設 $a=2m+1$，$b=2n+1$，

m、n 是整數，

$\therefore a\times b=(2m+1)\times(2n+1)$
$=4mn+2m+2n+1$
$=2(2mn+m+n)+1$

$\because 2mn+m+n$ 為整數，

故 $a\times b$ 是奇數。

即時演練

已知　a 是偶數。

求證　a^2+3a 也是偶數。

證明　$\because$ a 是偶數，設 $a=2n$，n 是整數，

$\therefore a^2+3a=(2n)^2+3\times2n$
$=4n^2+6n$
$=2(2n^2+3n)$

$\because$ $2n^2+3n$ 為整數，故 a^2+3a 是偶數。

2 類題　判別大小

配合課本 P151 例題 7　　配合課本 P151 隨堂練習　熟練

已知$-6>-7$，$(-6)^2<(-7)^2$，$-8>-9$，$(-8)^2<(-9)^2$，由這些例子猜測「a、b 為負數，若 $a>b$，則 $a^2<b^2$。」這個猜測正確嗎？如果正確，請證明它；如果不正確，請舉一個反例。

已知　a、b 為負數，且 $a>b$。

求證　$a^2<b^2$。

證明　$\because b^2-a^2=(b+a)(b-a)$

已知 $a>b$，$\therefore b-a$ 為負數，

又 $b+a$ 為負數，故 $b^2-a^2>0$，

即 $b^2>a^2$。

已知 $3>2$，$3>\frac{3+2}{2}>2$；$5>4$，$5>\frac{5+4}{2}>4$，由這些例子猜測「a、b 皆為正整數，且 $a>b$，則 $a>\frac{a+b}{2}>b$。」這個猜測正確嗎？如果正確，請證明它；如果不正確，請舉一個反例。

已知　a、b 皆為正整數，且 $a>b$。

求證　$a>\frac{a+b}{2}>b$。

證明　$\because a>b$，$a+a>b+a$，$2a>b+a$

$\therefore a>\frac{a+b}{2}$………①

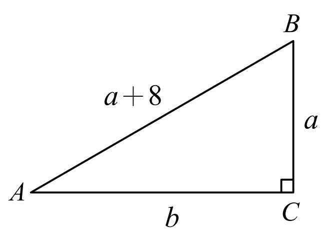
$\because a>b$，$a+b>b+b$，$a+b>2b$

$\therefore \frac{a+b}{2}>b$………②

由①、②可知，$a>\frac{a+b}{2}>b$。

3 類題　因數的判別

配合課本 P152 例題 8　　配合課本 P152 隨堂練習　熟練



已知　如圖，直角三角形 ABC 中，$a+8$ 為斜邊長，a、b 為兩股長，其中 a、b 均為正整數。

求證　16 為 b^2 的因數。

證明　$\because \triangle ABC$ 為直角三角形，

且 $a+8$ 為斜邊長，a、b 為兩股長，

$\therefore (a+8)^2=a^2+b^2$

$a^2+16a+64=a^2+b^2$

$b^2=16a+64=16(a+4)$

故 16 為 b^2 的因數。

已知　$a^2+6^2=(3b+15)^2$，其中 b 為正整數。

求證　a^2 是 9 的倍數。

證明　$a^2+6^2=(3b+15)^2$

$a^2=(3b+15)^2-6^2$

$=(3b+15+6)(3b+15-6)$

$=(3b+21)(3b+9)$

$=9(b+7)(b+3)$

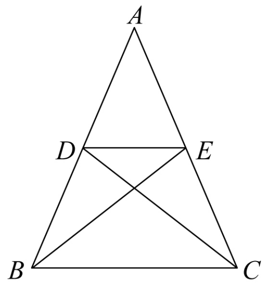
$\because (b+7)(b+3)$ 為正整數，

故 a^2 是 9 的倍數。

3-1 自我磨練

配合課本 P154～155 自我評量

1. 如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形，證明 $\overline{CD}=\overline{BE}$。



$\because \triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形，

$\therefore \overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AE}=\overline{AD}$，

在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ACD$ 中，

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$，

$\overline{AE}=\overline{AD}$，

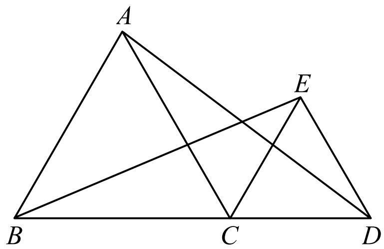
$\angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$（$SAS$ 全等性質），

故 $\overline{CD}=\overline{BE}$（對應邊相等）。

2. 已知 如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle CDE$ 皆為正三角形，連接 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$。

求證 $\overline{AD}=\overline{BE}$。



證明 (1) $\because \angle ECD=\angle ACB=$ 60 度，

$\angle ACD=\angle ECD+$ $\angle ACE$，

$\angle BCE=\angle ACB+$ $\angle ACE$，

$\therefore \angle ACD=$ $\angle BCE$。

(2) 在 $\triangle ACD$ 與 $\triangle BCE$ 中，

$\because$ $\overline{AC}=\overline{BC}$，

$\angle ACD=\angle BCE$，

$\overline{CD}=\overline{CE}$，

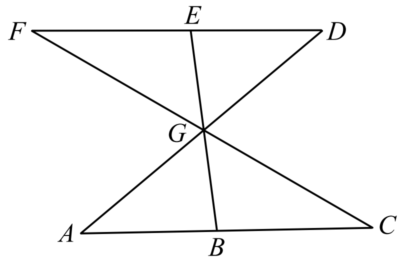
$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$（$SAS$ 全等性質），

故 $\overline{AD}=\overline{BE}$（對應邊相等）。

3. 如圖，G 為 $\overline{AD}$、$\overline{CF}$ 的中點，過 G 點作 $\overline{BE}$，分別交 $\overline{DF}$、$\overline{AC}$ 於 E、B 兩點，求證：

(1) $\angle A=\angle D$。

(2) $\overline{BG}=\overline{EG}$。



(1) $\because$ G 為 $\overline{AD}$、$\overline{CF}$ 的中點，

$\therefore$ $\overline{AG}=\overline{DG}$，$\overline{CG}=\overline{FG}$，

在$\triangle ACG$ 與$\triangle DFG$ 中，

$\because$ $\overline{AG}=\overline{DG}$，$\angle AGC=\angle DGF$，$\overline{CG}=\overline{FG}$，

$\therefore$ $\triangle ACG\cong\triangle DFG$（$SAS$ 全等性質），

故 $\angle A=\angle D$（對應角相等）。

(2) 在$\triangle AGB$ 與$\triangle DGE$ 中，

$\because$ $\angle A=\angle D$，$\overline{AG}=\overline{DG}$，$\angle AGB=\angle DGE$，

$\therefore$ $\triangle AGB\cong\triangle DGE$（$ASA$ 全等性質），

故 $\overline{BG}=\overline{EG}$（對應邊相等）。

4. 已知 a 為偶數，b 為奇數，求證 a^2+5b 是奇數。

$\because$ a 是偶數，設 $a=2n$，n 是整數，

b 是奇數，設 $b=2m+1$，m 是整數，

$\therefore$ $a^2+5b=(2n)^2+5\times(2m+1)$

$=4n^2+10m+5$

$=2(2n^2+5m+2)+1$

$\because$ $2n^2+5m+2$ 為整數，

故 a^2+5b 是奇數。

5. 已知 a 是正整數，$A=(4a+7)^2+2(4a+7)+17$，求證 A 是 16 的倍數。

$A=(4a+7)^2+2(4a+7)+17$

$=16a^2+56a+49+8a+14+17$

$=16a^2+64a+80$

$=16(a^2+4a+5)$

$\because$ a^2+4a+5 為正整數，

故 A 是 16 的倍數。

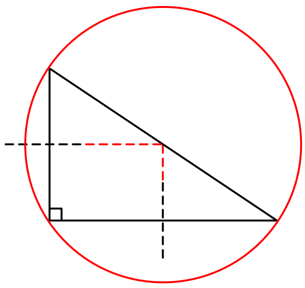
3-2 三角形的心

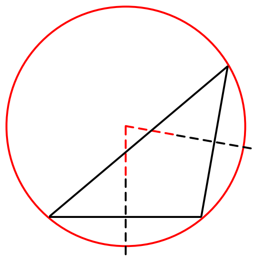
1. 外心

1. 三角形的外心：
   三角形三邊的中垂線交於一點，此點稱為三角形的外心，外心到三頂點的距離相等，且外心也是此三角形外接圓的圓心。
2. 三角形外心的位置：
   ①銳角三角形的外心在三角形內部。
   ②直角三角形的外心在三角形的斜邊中點。
   ③鈍角三角形的外心在三角形外部。

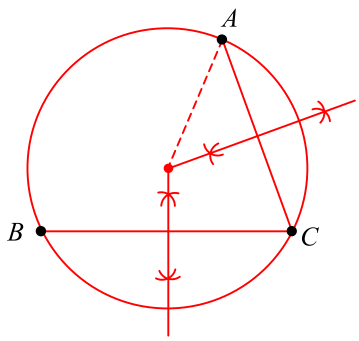
即時演練

1. 如圖，下列各三角形中，虛線爲該邊的中垂線，利用這些中垂線畫一個圓，使這個圓通過三角形的三個頂點。





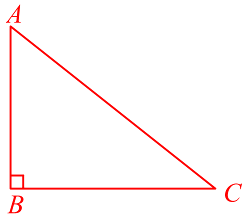
2. 如圖，利用尺規作圖畫一個圓，使得 A、B、C 三個點都在圓周上。



1 類題　配合課本 P160 例題 1　直角三角形的外接圓半徑　配合課本 P160 隨堂練習　熟練

直角三角形 ABC 中，$\angle B=90°$，$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=12$，求△ABC 外接圓的半徑。

解



∵△ABC 為直角三角形，

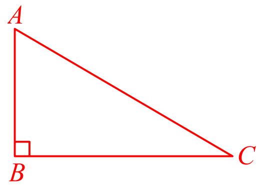
∴外心是斜邊 $\overline{AC}$ 的中點，

又 $\overline{AC}=\sqrt{9^2+12^2}=15$，

故外接圓半徑 $=\dfrac{15}{2}$。

直角三角形 ABC 中，$\angle B=90°$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=4\sqrt{3}$，求△ABC 外接圓的半徑。

解



∵△ABC 為直角三角形，

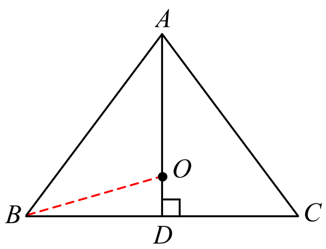
∴外心是斜邊 $\overline{AC}$ 的中點，

又 $\overline{AC}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}=8$，

故外接圓半徑 $=\dfrac{8}{2}=4$。

2 類題　配合課本 P161 例題 2　等腰三角形的外接圓半徑　配合課本 P161 隨堂練習　熟練

如圖，△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=20$，$\overline{BC}=24$，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，O 點為△ABC 的外心，求△ABC 的外接圓半徑。



解

∵△ABC 為等腰三角形，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，

∴ $\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=12$，$\overline{AD}=\sqrt{20^2-12^2}=16$。

∵O 點為△ABC 的外心，

∴O 點在 $\overline{AD}$ 上，連接 $\overline{OB}$，

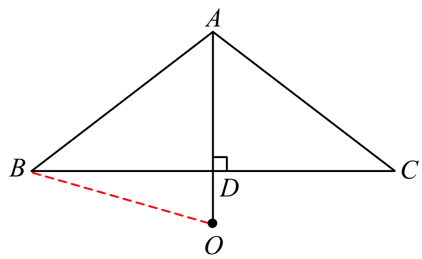
可設 $\overline{OA}=\overline{OB}=x$，則 $\overline{OD}=16-x$，

在直角三角形 OBD 中，$\overline{OB}^2=\overline{OD}^2+\overline{BD}^2$

$$x^2=(16-x)^2+12^2$$
$$32x=400$$
$$x=\frac{25}{2}$$

故△ABC 的外接圓半徑為 $\dfrac{25}{2}$。

如圖，O 點為等腰三角形 ABC 的外心，$\overline{AB}=\overline{AC}=10$，$\overline{BC}=16$，$\overline{AD}$ 垂直平分 $\overline{BC}$，O 點在 $\overline{AD}$ 的延長線上，求△ABC 的外接圓面積。



解

∵△ABC 為等腰三角形，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，

∴ $\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=8$，$\overline{AD}=\sqrt{10^2-8^2}=6$。

∵O 點為△ABC 的外心，連接 $\overline{OB}$，

可設 $\overline{OA}=\overline{OB}=x$，則 $\overline{OD}=x-6$

在直角三角形 OBD 中，$\overline{OB}^2=\overline{OD}^2+\overline{BD}^2$

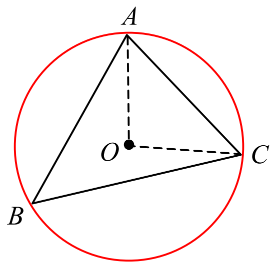
$$x^2=(x-6)^2+8^2$$
$$12x=100$$
$$x=\frac{25}{3}$$

△ABC 的外接圓面積為

$\dfrac{25}{3}\times\dfrac{25}{3}\times\pi=\dfrac{625}{9}\pi$。

3 類題 ｜ 配合課本 P162 例題 3 ｜ 外心與角度 ｜ 配合課本 P162 隨堂練習 ｜ 熟練

如圖，△ABC 中，O 點爲△ABC 的外心，若∠ABC＝47°，求∠AOC。



解

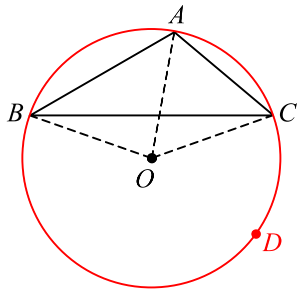
如圖，畫出△ABC 的外接圓，

$\because \angle ABC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

$=\frac{1}{2}\angle AOC$

$\therefore \angle AOC=2\angle ABC=2\times 47°=94°$。

如圖，△ABC 中，O 點爲△ABC 的外心，∠ABC＝30°，∠ACB＝40°，求∠BOC 與∠AOB。



解

如圖，畫出△ABC 的外接圓，

$\angle BAC=180°-30°-40°=110°$，

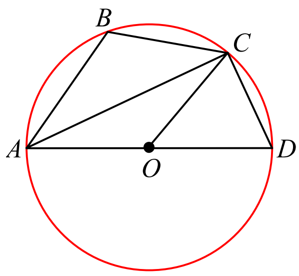
$\overset{\frown}{BDC}=2\angle BAC=2\times 110°=220°$，

$\angle BOC=\overset{\frown}{BAC}=360°-220°=140°$，

$\angle AOB=\overset{\frown}{AB}=2\angle ACB=2\times 40°=80°$。

4 類題 ｜ 配合課本 P163 例題 4 ｜ 外心的應用 ｜ 配合課本 P163 隨堂練習 ｜ 熟練

如圖，O 點在 $\overline{AD}$ 上，且 O 點爲△ABC 與△ACD 的外心，若∠COD＝50°，求∠ABC。



解

$\because O$ 點爲△ACD 的外心，

以 $\overline{OA}$ 爲半徑畫出△ABC 的外接圓，

又 O 點爲△ABC 的外心，

$\therefore C$ 點也在圓 O 上。

$\because$△COD 爲等腰三角形（半徑 $\overline{OC}=\overline{OD}$），

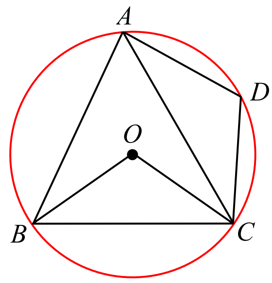
$\therefore \angle D=(180°-50°)\div 2=65°$，

又圓內接四邊形的對角互補，

$\therefore \angle ABC=180°-\angle D$

$=180°-65°=115°$

如圖，O 點爲△ABC 與△ACD 的外心，若∠BOC＝110°，∠D＝115°，求∠ACB。



解

$\angle BAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 110°=55°$，

又圓內接四邊形的對角互補，

$\therefore \angle ABC=180°-\angle D=180°-115°=65°$，

故 $\angle ACB=180°-\angle BAC-\angle ABC$

$=180°-55°-65°=60°$。

2. 內心

1. 三角形的內心：

   三角形三內角的角平分線交於一點，此點稱為三角形的內心，內心到三邊的距離相等，且內心也是此三角形內切圓的圓心。

2. 三角形內心與面積：

   若 I 點為$\triangle ABC$ 的內心，則$\triangle AIB$ 面積：$\triangle BIC$ 的面積：$\triangle CIA$ 面積$=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}$。

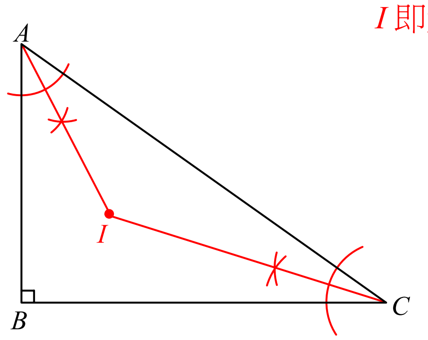
3. 三角形的內切圓半徑：

   ①若 r 為三角形的內切圓半徑，S 為三角形的周長，則此三角形的面積為 $\frac{1}{2}rS$。

   ②若 r 為直角三角形的內切圓半徑，則兩股和＝斜邊長$+2r$，即 $r=\frac{兩股和－斜邊長}{2}$。

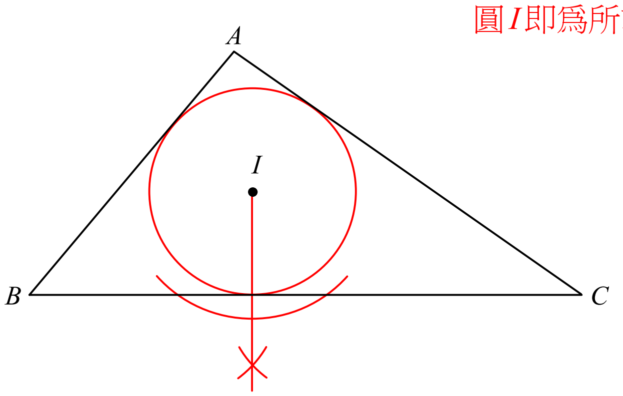
即時演練

1. 如圖，$\triangle ABC$ 爲直角三角形，利用尺規作圖，求作$\triangle ABC$ 的內心。



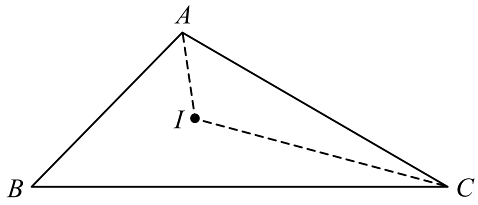
I 即爲所求。

2. 如圖，$\triangle ABC$ 爲鈍角三角形，I 點爲內心，利用尺規作圖，求作$\triangle ABC$ 的內切圓。



圓 I 即爲所求。

如圖，I 點為$\triangle ABC$ 的內心，若$\angle BAC=106°$，$\angle ACB=30°$，求$\angle AIC$。



解

$\because I$ 點為$\triangle ABC$ 的內心，

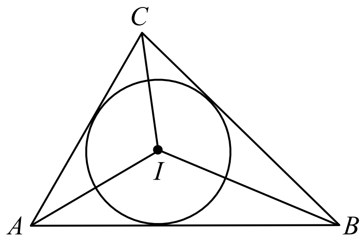
$\therefore \overline{AI}$ 為$\angle BAC$ 的角平分線，

則$\angle IAC=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{1}{2}\times 106°=53°$，

同理，$\angle ICA=\dfrac{1}{2}\angle ACB=\dfrac{1}{2}\times 30°=15°$，

故$\angle AIC=180°-53°-15°=112°$。

如圖，$\triangle ABC$ 中，I 點為內切圓的圓心，$\overline{AB}=14$，$\overline{BC}=12$，$\overline{AC}=10$，求$\triangle AIB$ 面積：$\triangle BIC$ 面積：$\triangle AIC$ 面積。



解

$\because I$ 點為內切圓的圓心，

$\therefore \triangle AIB$ 面積：$\triangle BIC$ 面積：$\triangle AIC$ 面積

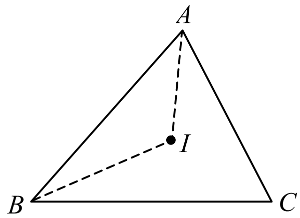
$=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{AC}$

$=14:12:10$

$=7:6:5$。

即時演練

1. 如圖，I 點為$\triangle ABC$ 的內心，若$\angle AIB=120°$，求$\angle ACB$。



$\angle IAB+\angle IBA=180°-\angle AIB$

$=180°-120°$

$=60°$

$\angle ACB=180°-\angle CAB-\angle CBA$

$=180°-2(\angle IAB+\angle IBA)$

$=180°-2\times 60°=60°$

2. 若$\triangle ABC$ 為直角三角形，I 點為內心，$\angle A=90°$，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=12$，求$\triangle AIB$ 面積：$\triangle BIC$ 面積：$\triangle AIC$ 面積。

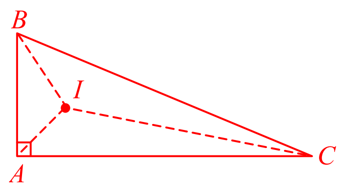
$\because \triangle ABC$ 為直角三角形，

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{12^2+5^2}=13$，

故$\triangle AIB$ 面積：$\triangle BIC$ 面積：$\triangle AIC$ 面積

$=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{AC}$

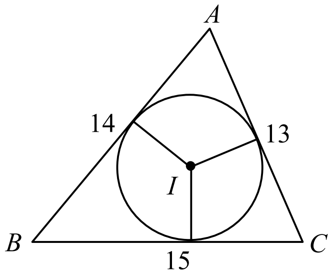
$=5:13:12$。



2 類題

配合課本 P170 例題 6　利用面積求內切圓半徑　配合課本 P170 隨堂練習　熟練

如圖，I 點為$\triangle ABC$ 的內心，若$\triangle ABC$ 的面積為 84，$\overline{AB}=14$，$\overline{BC}=15$，$\overline{AC}=13$，求$\triangle ABC$ 的內切圓半徑。



解

設內切圓半徑為 r，三角形的周長為 S，

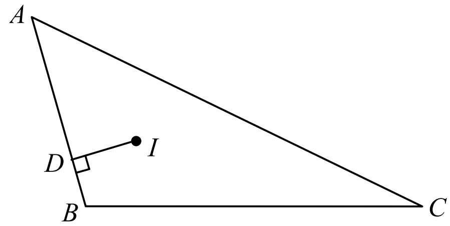
$\triangle ABC$ 面積$=\dfrac{1}{2}\times r\times S$

$84=\dfrac{1}{2}\times r\times(14+15+13)$

$r=4$

故$\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 4。

如圖，I 點為$\triangle ABC$ 的內心，$\overline{ID}\perp\overline{AB}$，若$\triangle ABC$ 的面積為 $10\sqrt{2}$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=7$，$\overline{AC}=9$，求 $\overline{ID}$。



解

設內切圓半徑為 r，三角形的周長為 S，

$\triangle ABC$ 面積$=\dfrac{1}{2}\times r\times S$

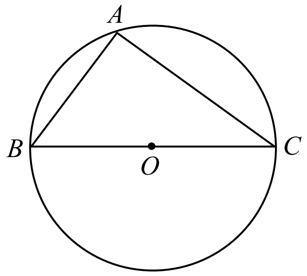
$10\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\times r\times(4+7+9)$

$r=\sqrt{2}$，故 $\overline{ID}=r=\sqrt{2}$。

3 類題

配合課本 P172 例題 7　直角三角形的內切圓　配合課本 P172 隨堂練習　熟練

如圖，圓 O 為$\triangle ABC$ 的外接圓，半徑為 10，$\overline{BC}$ 為圓 O 的直徑，且 $\overline{AB}=12$，求$\triangle ABC$ 的內切圓半徑。



解

$\because$ $\overline{BC}$ 為圓 O 的直徑，

$\therefore$ $\triangle ABC$ 為直角三角形

（半圓所對的圓周角是直角），

直徑 $\overline{BC}=20$，$\overline{AC}=\sqrt{20^2-12^2}=16$，

設內切圓半徑為 r，$\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{BC}+2r$

$12+16=20+2r$

$r=4$

故$\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 4。

直角三角形 ABC 中，$\angle B=90°$，$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=12$，求$\triangle ABC$ 的內切圓半徑。

解

$\overline{AC}=\sqrt{9^2+12^2}=15$，

設內切圓半徑為 r，

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}+2r$

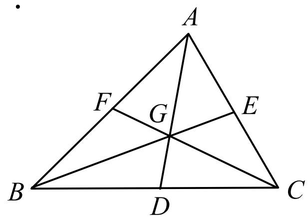
$9+12=15+2r$

$r=3$

故$\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 3。

3. 重心

1. 任意三角形三內角的三條中線交於同一點，此點稱為三角形的重心。
2. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三條中線，G 點為重心，則：



① $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$，$\overline{BG}:\overline{GE}=2:1$，$\overline{CG}:\overline{GF}=2:1$。

② $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}$，$\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BE}$，$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CF}$。

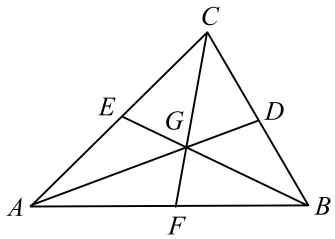
③ $\triangle AGB$ 面積$=\triangle BGC$ 面積$=\triangle CGA$ 面積$=\frac{1}{3}\triangle ABC$ 面積。

④ $\triangle AGF$ 面積$=\triangle BGF$ 面積$=\triangle BGD$ 面積$=\triangle CGD$ 面積

$=\triangle CGE$ 面積$=\triangle AGE$ 面積$=\frac{1}{6}\triangle ABC$ 面積。

1 類題 配合課本 P176 例題 8　　重心到頂點的距離　　配合課本 P176 隨堂練習 **熟練**

如圖，$\triangle ABC$ 中，三條中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於 G 點，$\overline{AD}=54$，$\overline{BE}=45$，$\overline{CF}=39$，求 $\overline{GD}$、$\overline{GE}$、$\overline{GF}$。



解

$\because G$ 點為三條中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 的交點，

$\therefore G$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心，

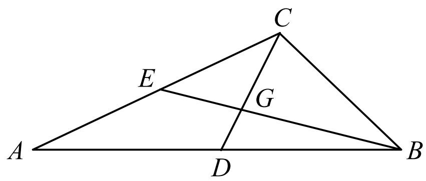
則 $\overline{AG}:\overline{GD}=\overline{BG}:\overline{GE}=\overline{CG}:\overline{GF}=2:1$，

故 $\overline{GD}=\frac{1}{3}\overline{AD}=\frac{1}{3}\times 54=18$。

$\overline{GE}=\frac{1}{3}\overline{BE}=\frac{1}{3}\times 45=15$。

$\overline{GF}=\frac{1}{3}\overline{CF}=\frac{1}{3}\times 39=13$。

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，$\overline{BE}$、$\overline{CD}$ 交於 G 點，若 $\overline{CG}+\overline{BG}=12$，求 $\overline{BE}+\overline{CD}$。



解

$\because G$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore \overline{BG}:\overline{GE}=\overline{CG}:\overline{GD}=2:1$，

故 $\overline{BE}+\overline{CD}=\overline{BG}+\overline{GE}+\overline{CG}+\overline{GD}$

$=(\overline{BG}+\overline{CG})+(\overline{GE}+\overline{GD})$

$=12+\frac{1}{2}\times 12$

$=18$。

即時演練

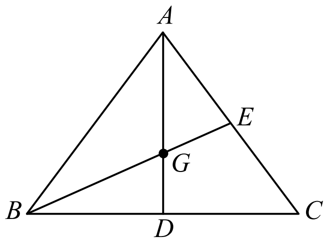
若三角形的三中線長分別為 21、23、25，求其重心到三邊中點的距離和。

$\because$ 重心到三邊中點的距離$=\frac{1}{3}\times$中線長，

$\therefore$ 重心到三邊中點的距離和$=\frac{1}{3}\times$三中線長之和$=\frac{1}{3}\times(21+23+25)=23$。

2 類題　配合課本 P177 例題 9　重心與面積　配合課本 P177 隨堂練習　熟練

如圖，等腰三角形 ABC 中，D、E 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的中點，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 交於 G 點，若 $\overline{AC}=10$，$\overline{BC}=12$，求$\triangle AGB$ 的面積。



解

$\because D$、E 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的中點，

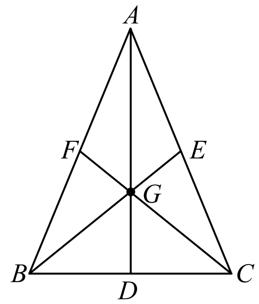
$\therefore G$ 點為$\triangle ABC$ 的重心，且 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，

$\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=6$，$\overline{AD}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

$\triangle AGB$ 的面積 $=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$ 的面積

$=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times12\times8\right)=16$。

如圖，等腰三角形 ABC 中，D、E、F 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中點，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於 G 點，若 $\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=10$，求$\triangle CGE$ 的面積。



解

$\because D$、E、F 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中點，

$\therefore G$ 點為$\triangle ABC$ 的重心，且 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，

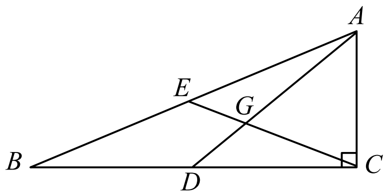
$\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=5$，$\overline{AD}=\sqrt{13^2-5^2}=12$，

$\triangle CGE$ 的面積 $=\dfrac{1}{6}\triangle ABC$ 的面積

$=\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{1}{2}\times10\times12\right)=10$。

3 類題　配合課本 P178 例題 10　直角三角形的重心　配合課本 P178 隨堂練習　熟練

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，兩條中線 $\overline{AD}$、$\overline{CE}$ 交於 G 點，$\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=12$，求 $\overline{CG}$。



解

$\overline{AB}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，

$\because E$ 點為直角三角形 ABC 的斜邊中點，

$\overline{CE}=\overline{AE}=\overline{BE}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times13=\dfrac{13}{2}$，

又$\triangle ABC$ 的兩條中線交於 G 點，

$\therefore G$ 點為$\triangle ABC$ 的重心，

故 $\overline{CG}=\dfrac{2}{3}\overline{CE}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{13}{2}=\dfrac{13}{3}$。

承類題 4，求$\triangle AGC$ 的面積。

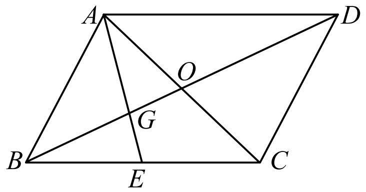
解

$\because G$ 點為$\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore\triangle AGC$ 的面積 $=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$ 的面積

$=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times12\times5\right)=10$

如圖，▱$ABCD$ 中，O 為對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 的交點，E 為 $\overline{BC}$ 的中點，若 $\overline{BD}=18$，求 $\overline{OG}$ 。



解

∵平行四邊形對角線互相平分，

$\therefore \overline{BO}=\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 18=9$，

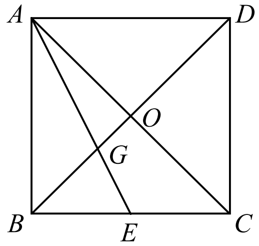
△ABC 中，

O、E 分別為 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的中點，

∴G 點為△ABC 的重心，

故 $\overline{OG}=\frac{1}{3}\overline{BO}=\frac{1}{3}\times 9=3$。

如圖，正方形 $ABCD$ 中，O 為對角線的交點，E 為 $\overline{BC}$ 中點，且 $\overline{AE}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 G 點，若 $\overline{AB}=6$，求 $\overline{BG}$ 。



解

∵正方形對角線互相平分，

$\therefore \overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6^2+6^2}=3\sqrt{2}$，

△ABC 中，

O、E 分別為 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的中點，

∴G 點為△ABC 的重心，

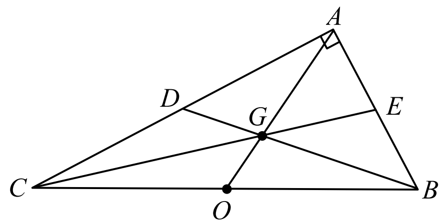
故 $\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BO}=\frac{2}{3}\times 3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ 。

即時演練

如圖，△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=15$，三條中線 $\overline{AO}$、$\overline{BD}$、$\overline{CE}$ 交於 G 點，求：

(1) $\overline{AG}$ 。

(2)四邊形 $ADGE$ 的面積。



(1) $\overline{BC}=\sqrt{8^2+15^2}=17$，

∵O 點為△ABC 的斜邊中點，

$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\frac{17}{2}$，

又 G 點為重心，

$\therefore \overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{OA}=\frac{2}{3}\times\frac{17}{2}=\frac{17}{3}$ 。

(2)四邊形 $ADGE$ 面積

$=$△ADG 面積＋△AEG 面積

$=\frac{2}{6}\times(\frac{1}{2}\times 8\times 15)$

$=20$

3-2 自我磨練

配合課本 P186～187 自我評量

1. 已知直角三角形的兩股長分別為 18、24，求其外心到三個頂點的距離和。

斜邊長 $=\sqrt{18^2+24^2}=30$，

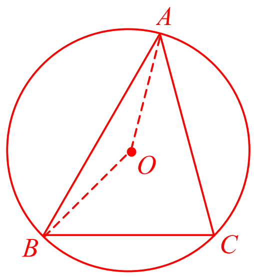
$\therefore$ 外心到三頂點的距離和 $=3\times(\frac{1}{2}\times 30)=45$。

2. $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC=45°$，$\angle ABC=60°$，若 O 點為 $\triangle ABC$ 的外心，求 $\angle AOB$。

如圖，圓 O 為 $\triangle ABC$ 的外接圓，

$\because O$ 點為 $\triangle ABC$ 的外心，

$$\begin{aligned}\therefore \angle AOB &= \overset{\frown}{AB}\\ &= 2\angle ACB\\ &= 2\times(180°-45°-60°)\\ &= 150°\end{aligned}$$



3. 如圖，O 點為 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overline{AB}=\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=10$，求 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。

作 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$，則 $\overline{BM}=\overline{CM}=5$，

$\overline{AM}=\sqrt{13^2-5^2}=12$，

$\because O$ 點為 $\triangle ABC$ 的外心，

令 $\overline{OA}=\overline{OB}=x$，$\overline{OM}=12-x$，

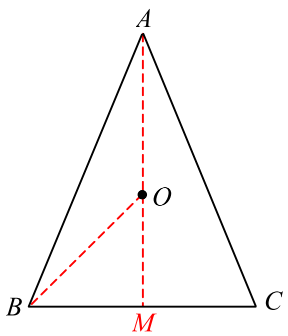
在直角三角形 OBM 中，

$\overline{OB}^2=\overline{OM}^2+\overline{BM}^2$

$x^2=(12-x)^2+5^2$

$x=\frac{169}{24}$

故 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $\frac{169}{24}$。



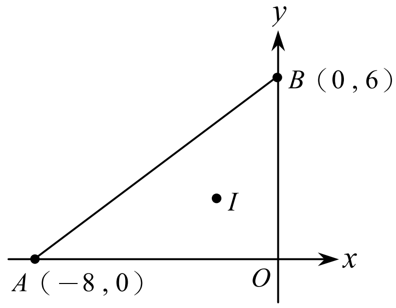
4. 已知$\triangle ABC$的面積為 36，周長為 24，求內切圓半徑。

$\triangle ABC$的面積$=\dfrac{1}{2}\times$內切圓半徑$\times\triangle ABC$的周長

$36=\dfrac{1}{2}\times$內切圓半徑$\times 24$

內切圓半徑$=3$。

5. 如圖，坐標平面上三點，$A(-8,0)$、$B(0,6)$，I點為$\triangle AOB$的內心，求I點坐標。



$\overline{OA}=8$，$\overline{OB}=6$，

$\overline{AB}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

設內切圓半徑為r，

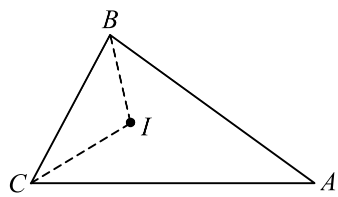
則$\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{AB}+2r$

$6+8=10+2r$

$r=2$

故I點坐標為$(-2,2)$。

6. 如圖，$\triangle ABC$中，I點為內心，若$\angle BIC=108°$，求$\angle BAC$。



$\angle IBC+\angle ICB=180°-\angle BIC=180°-108°=72°$，

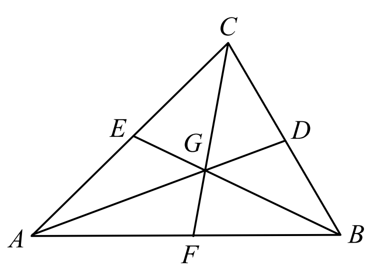
$\angle BAC=180°-\angle ABC-\angle ACB$

$=180°-2(\angle IBC+\angle ICB)$

$=180°-2\times 72°$

$=36°$。

7. 如圖，$\triangle ABC$中，三中線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於G點，若$\triangle ABC$的面積為 60 平方公分，求四邊形$BDGF$的面積。



$\because G$為三中線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$的交點，

$\therefore G$點為$\triangle ABC$的重心，

四邊形$BDGF$的面積$=\triangle BDG$的面積$+\triangle BFG$的面積

$=\dfrac{1}{6}\triangle ABC$的面積$+\dfrac{1}{6}\triangle ABC$的面積

$=\dfrac{2}{6}\times 60$

$=20$（平方公分）

頁次	
1	1-1 連比 1.求連比 ◆即時演練 1.(1) 4：7：11 (2) 3：5：12 2. 2：3：5 ◆類題 1 8：20：15 ◆熟練 1 15：18：10
2	◆類題 2 9：24：16 ◆熟練 2 10：4：5 ◆類題 3 3：1：2 ◆熟練 3 1.20：8：3 2.15：20：18
3	2.連比例式的應用 ◆類題 1 $x=18$，$y=24$，$z=30$ ◆熟練 1 $\frac{7}{11}$ ◆類題 2 875 個 ◆熟練 2 38400 元
4	◆類題 3 (1) 12：14：21 (2) 26：35：33 ◆熟練 3 21：20

頁次	
5	◆類題 4 72：16：9 ◆熟練 4 9：6：4 ◆類題 5 5：4：3 ◆熟練 5 12：9：8
6	1-1 自我磨練 1.(1) 9：6：7 (2) 12：27：10 (3) 9：8：6 2. 40：24：9 3. 64 公斤
7	4. 36 5. $x=40$，$y=24$，$z=48$ 6. 15：12：10
8	1-2 比例線段 1.等高三角形 ◆類題 1 (1) 2：3 (2) 1：2 ◆熟練 1 (1) 5：7 (2) 7：12 ◆即時演練 (1) 3 (2) $\frac{1}{2}$
9	2.平行線截比例線段 ◆類題 1 24 ◆熟練 1 16

頁次

◆即時演練

20

10 ◆類題 2

18

◆熟練 2

6

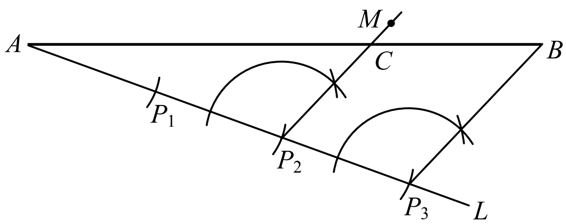
◆類題 3

$\overline{DE}=12$，$\overline{EF}=18$

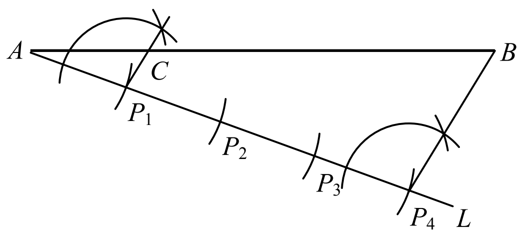
◆熟練 3

7

11 ◆類題 4



◆熟練 4



◆即時演練

45

12 3.利用比例線段判別平行

◆類題 1

在△ABC 中，

$\because \overline{AD}:\overline{DB}=14:8=7:4$，

$\overline{AE}:\overline{EC}=21:12=7:4$，

$\therefore \overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$。

◆類題 1

在△ABC 中，

$\because \overline{AD}:\overline{AB}=5:11$，

$\overline{AE}:\overline{AC}=15:33=5:11$，

$\therefore \overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$。

頁次

◆即時演練

在△ABC 中，

$\because \overline{DB}:\overline{AB}=22:40=11:20$，

$\overline{EC}:\overline{AC}=24:42=12:21$，

$\therefore \overline{DE}$ 和 $\overline{BC}$ 不平行。

13 4.三角形兩邊中點連線段性質

◆類題 1

32

◆熟練 1

(1)$\because D$、E、F 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的中點，

$\therefore \overline{DF}\,/\!/\,\overline{BC}$，$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{AC}$，

在四邊形 $DECF$ 中，

$\because \overline{DF}\,/\!/\,\overline{BC}$，$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{AC}$，

$\therefore$四邊形 $DECF$ 為平行四邊形。

(2) 52

◆類題 2

15

◆熟練 2

45

14 1-2 自我磨練

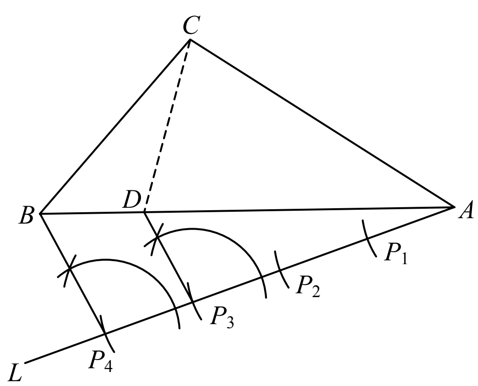
1.(1) 150

(2) 375

2. 80

3. $\overline{AC}=24$，$\overline{BD}=36$

15 4.(1)



(2) 3：1，3：1

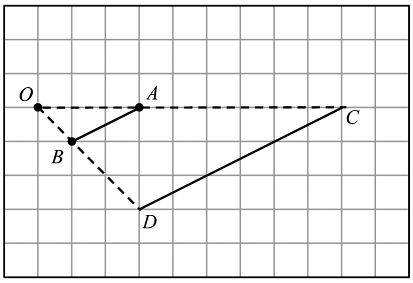
5. 18

頁次

16 1-3 相似多邊形

1.圖形的縮放

◆類題 1

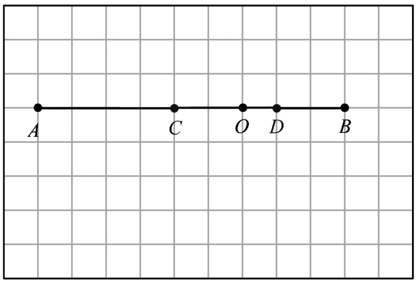


$\overline{CD}$ 即為所求。

◆熟練 1

(C)

◆即時演練



$\overline{CD}$ 即為所求。

17 ◆類題 2

6 公分，144°

◆熟練 2

2 公分，108°

2.相似多邊形

◆類題 1

(1)是，

∵正六邊形每一個內角都是 120°，

∴對應角相等。

(2)是，∵對應邊長比都是 3：1。

(3)是，∵對應角相等、對應邊成比例，

∴甲與乙相似。

◆熟練 1

(1)是，

∵正三角形每一個內角都是 60°，

∴對應角相等。

(2)是，∵對應邊長比都是 6：5。

(3)是，∵對應角相等、對應邊成比例，

∴丙與丁相似。

頁次

18 ◆類題 2

(1)兩個等腰直角三角形一定相似，

∵兩個等腰直角三角形的

對應邊成比例（1：1：$\sqrt{2}$），

且對應角也相等（45°、45°、90°）。

(2)兩個平行四邊形不一定相似，

∵兩個平行四邊形的對應邊不一定

成比例，且對應角不一定相等。

◆熟練 2

(1)是　(2)否　(3)否

◆類題 3

7

◆熟練 3

150°

19 3.三角形的相似性質

◆類題 1

45

◆熟練 1

10

◆類題 2

16

◆熟練 2

17

20 ◆類題 3

(1)在△ABC 與△DBE 中，

∵ $\overline{AB}：\overline{DB}=(5+7)：4=3：1$，

$\overline{BC}：\overline{BE}=(4+17)：7=3：1$，

又 $\angle B=\angle B$，

∴△ABC～△DBE（SAS 相似性質）。

(2) 6

◆熟練 3

14

◆類題 4

(1)在△ABC 與△CAD 中，

∵ $\overline{AB}：\overline{CA}=9：6=3：2$，

$\overline{BC}：\overline{AD}=12：8=3：2$，

$\overline{AC}：\overline{CD}=6：4=3：2$，

∴△ABC～△CAD（SSS 相似性質）。

(2)$\angle BAC$

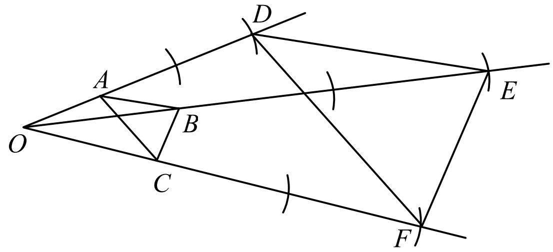
◆熟練 4

(1)$\boxed{\vee}$　(2)$\boxed{\vee}$　(3)$\boxed{}$

頁次

21 **1-3 自我磨練**

1.



2.(1) 否

(2) 否

(3) 否

3. $\overline{QR}=30$，$\overline{ST}=42$

22 4. $\angle P=75°$，$\angle Q=125°$

5.(1) $\square$　　(2) $\boxed{\vee}$ *SSS*

(3) $\boxed{\vee}$ *AA*　　(4) $\boxed{\vee}$ *SAS*

(5) $\square$　　(6) $\boxed{\vee}$ *SAS*

(7) $\boxed{\vee}$ *SSS*　　(8) $\boxed{\vee}$ *AA*（*AAA*）

(9) $\square$

23 6.(1) $\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=12$，$\overline{CD}=15$

(2) $\overline{AE}=\dfrac{105}{4}$，$\overline{GD}=\dfrac{75}{4}$

7.(1)是。

在△*ABC* 與△*CDE* 中，

$\because \overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，$\overline{BC}\,//\,\overline{DE}$，

$\therefore \angle A=\angle ECD$，$\angle ACB=\angle CED$，

故△*ABC*～△*CDE*（*AA* 相似性質）。

(2) 45

頁次

24 **1-4 相似三角形的應用與三角比**

1.相似三角形的比例關係

◆類題 1

2：3

◆熟練 1

(1) 1：2　　(2) 24

◆類題 2

$\dfrac{3}{5}$

◆熟練 2

18

25 ◆類題 3

1：4

◆熟練 3

(1) $\angle AED$，$\angle ABF=\angle ADE$，*AA*

(2) 24

◆即時演練

1. 1：16

2. $\dfrac{96}{5}$

26 **2.簡易測量**

◆類題 1

40 公尺

◆熟練 1

18 公尺

◆即時演練

144 公尺

27 ◆類題 2

10 公尺

◆熟練 2

5.6 公尺

頁次

28 3.特殊直角三角形的邊長比

◆類題 1

$\overline{BC}=4\sqrt{3}$，$\overline{AB}=8$

◆熟練 1

$\overline{BC}=3\sqrt{3}$，$\overline{AC}=6\sqrt{3}$

◆類題 2

$\overline{AC}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$

◆熟練 2

$\overline{AB}=3\sqrt{2}$，$\overline{BC}=3$

29 4.直角三角形的三角比

◆類題 1

$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$

◆熟練 1

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

◆即時演練

1

30 ◆類題 2

(1) $\sin A$　(2) $\cos A$　(3) $\tan A$

◆熟練 2

(1) $\tan B$　(2) $\sin B$　(3) $\cos B$

◆類題 3

240 公尺

◆熟練 3

3 公尺

31 1-4 自我磨練

1. 10

2.(1) 2：3　(2) 4：9

3. 4 公尺

32 4.(1) 30°　(2) 3

5.(1) $\cos A$　(2) $\sin A$　(3) $\tan A$

6. 720 公尺

頁次

33 2-1 點、線、圓

1.圓、圓弧長與扇形

◆類題 1

(1) 72°　(2) 5π 平方公分

◆熟練 1

(1) 120°　(2) 12π 平方公分

◆類題 2

$8-2\pi$

◆熟練 2

$24\pi-36\sqrt{3}$

34 ◆類題 3

8π 公尺

◆熟練 3

$\frac{16\pi}{5}$ 公尺

2.點與圓的位置關係

35 ◆類題 1

(1) A　(2) B　(3) C

◆熟練 1

(1) F　(2) E　(3) D

◆類題 2

A 點在圓上，B 點在圓內，C 點在圓外

◆熟練 2

7

頁次

36 3.直線與圓的位置關係

37 ◆類題 1

切線是 L_2，割線是 L_3

◆熟練 1

切線是 L_2，割線是 L_3

◆即時演練

(A)

◆類題 2

$2\sqrt{34}$

◆熟練 2

$6\sqrt{3}$

38 ◆類題 3

$\frac{240}{17}$

◆熟練 3

$\frac{120}{13}$

◆類題 4

4

◆熟練 4

5

39 ◆類題 5

$2\sqrt{7}$

◆熟練 5

$2\sqrt{5}$

◆即時演練

1. $\overline{AB} > \overline{CD}$
2. (1) $=$ (2) $<$ (3) $=$ (4) $>$

40 2-1 自我磨練

1. 16π 平方公分

2.(1) $2\sqrt{41}$

(2) A 點在圓內，
B 點在圓上，
C 點在圓外。

3.(1) L_2 是切線，L_3 是割線

(2) 3

41 4. 9

5. 2

6. 8

頁次

42 2-2 圓內角與圓外角

1.圓心角及其所對的弧

◆類題 1

$120°$

◆熟練 1

$60°$

◆即時演練

$225°$

43 ◆類題 2

(1) 3：2

(2) 3：2

◆熟練 2

12

2.圓周角及其所對的弧

◆即時演練

$\angle CAD$，$\angle CBD$

44 ◆類題 1

$\angle ACB = 30°$，$\angle ADB = 30°$

◆熟練 1

$168°$

◆類題 2

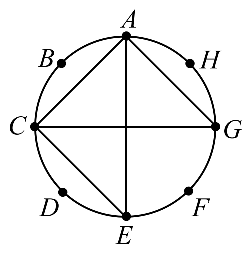
$\overset{\frown}{AB} = 120°$，$\overset{\frown}{BC} = 140°$

◆熟練 2

$100°$

45 ◆即時演練

1. $50°$
2.



◆類題 3

$\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$，

$\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$，

又 $\angle AOC = \overset{\frown}{AC}$，$\angle BOD = \overset{\frown}{BD}$，

故 $\angle AOC = \angle BOD$。

◆熟練 3

$30°$

46 3.圓內接四邊形

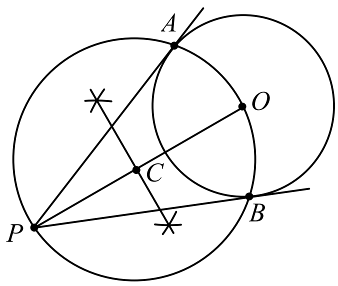
◆類題 1

130°

◆熟練 1

100°

◆類題 2



◆熟練 2

(1) 120°

(2) 6

47 2-2 自我磨練

1. $\angle 1=125^\circ$，$\angle 2=72^\circ$

2.(1) 5：3

(2) 5：3

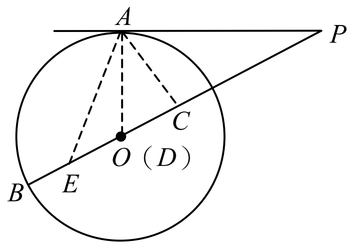
3. $\angle AOB=100^\circ$，$\angle C=50^\circ$，$\angle D=50^\circ$

48 4. $\angle 1=30^\circ$，$\angle 2=50^\circ$，$\angle 3=100^\circ$

5.(1) $\overline{OP}$ 上任一點

(2)即 O 點

(3) $\overline{OB}$ 上任一點



6. 95°

頁次

49 3-1 推理證明

1.幾何證明

◆類題 1

在$\triangle ABE$與$\triangle ACD$中，

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$（已知），

$\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC$

$=\frac{1}{2}\angle ACB$

$=\angle ACD$

$\angle A=\angle A$（公用角），

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACD$（$ASA$ 全等性質），

故 $\overline{BE}=\overline{CD}$。

◆熟練 1

$\overline{BD}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{AD}$，$SSS$，

對應角相等

50 ◆類題 2

(1)在$\triangle ABD$與$\triangle CBD$中，

$\because \angle BAD=\angle BCD$，

$\angle ABD=\angle CBD$，

$\overline{BD}=\overline{BD}$，

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CBD$（$AAS$ 全等性質），

故 $\overline{AB}=\overline{CB}$（對應邊相等）。

(2)在$\triangle ABE$與$\triangle CBE$中，

$\because \overline{AB}=\overline{CB}$，

$\angle ABE=\angle CBE$，

$\overline{BE}=\overline{BE}$，

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CBE$（$SAS$ 全等性質），

故 $\overline{AE}=\overline{CE}$（對應邊相等）。

頁次

◆熟練 2

(1)在$\triangle ABC$與$\triangle DCB$中，

$\because \overline{AB}=\overline{DC}$，

$\angle ABC=\angle DCB$，

$\overline{BC}=\overline{BC}$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DCB$（$SAS$全等性質），

故$\angle BAC=\angle CDB$（對應角相等）。

(2)在$\triangle ABE$與$\triangle DCE$中，

$\because \overline{AB}=\overline{DC}$，

$\angle BAE=\angle CDE$，

$\angle AEB=\angle DEC$，

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle DCE$（$AAS$全等性質），

故$\overline{AE}=\overline{DE}$（對應邊相等）。

◆即時演練

$\because \overline{AE}$、$\overline{BD}$互相平分，

$\therefore \overline{AC}=\overline{CE}$，$\overline{BC}=\overline{CD}$，

在$\triangle ABC$與$\triangle EDC$中，

$\because \overline{AC}=\overline{CE}$，

$\angle ACB=\angle ECD$，

$\overline{BC}=\overline{CD}$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle EDC$（$SAS$全等性質），

故$\angle BAC=\angle CED$（對應角相等）。

51 ◆類題 3

在$\triangle ABD$中，

$\because E$、F為$\overline{AD}$、$\overline{AB}$的中點，

$\therefore \overline{EF}\,//\,\overline{BD}$，$\overline{EF}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$。

在$\triangle CBD$中，

$\because G$、H為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$的中點，

$\therefore \overline{GH}\,//\,\overline{BD}$，$\overline{GH}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$。

因此，$\overline{EF}\,//\,\overline{GH}\,//\,\overline{BD}$，

$\overline{EF}=\overline{GH}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$，

故四邊形$EFGH$為平行四邊形

（一雙對邊平行且相等）。

頁次

◆熟練 3

$\because \overline{EF}=\overline{GH}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$，

同理，$\overline{FG}=\overline{EH}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$，

故$\square EFGH$的周長$=2(\overline{EF}+\overline{FG})$

$=2(\dfrac{1}{2}\overline{BD}+\dfrac{1}{2}\overline{AC})$

$=\overline{BD}+\overline{AC}$。

◆類題 4

在$\triangle ABC$與$\triangle DEC$中，

$\because \overline{BC}:\overline{CE}=10:20=1:2$，

$\overline{AC}:\overline{CD}=6:12=1:2$，

$\angle ACB=\angle DCE$（對頂角相等），

$\therefore \triangle ABC\sim\triangle DEC$（$SAS$相似性質）。

◆熟練 4

在$\triangle OPQ$與$\triangle OSR$中，

$\because \overline{OP}=3\overline{OS}$，$\overline{OQ}=3\overline{OR}$，

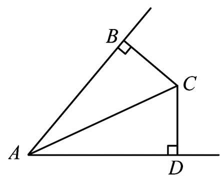
$\angle POQ=\angle SOR$（對頂角相等），

$\therefore \triangle OPQ\sim\triangle OSR$（$SAS$相似性質），

故$\overline{PQ}=3\overline{RS}$（對應邊成比例）。

52 2.輔助線

◆類題 1



連接$\overline{AC}$，

在$\triangle ABC$與$\triangle ADC$中，

$\because \overline{BC}=\overline{CD}$，

$\angle ABC=\angle ADC=90°$，

$\overline{AC}=\overline{AC}$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC$（$RHS$全等性質），

故$\overline{AB}=\overline{AD}$（對應邊相等）。

頁次

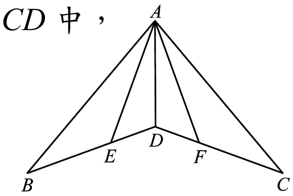
◆熟練 1

48

◆即時演練

(1)連接 $\overline{AD}$，

在△ABD 與△ACD 中，



∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$，

$\overline{BD}=\overline{CD}$，

$\overline{AD}=\overline{AD}$，

∴△$ABD\cong$△ACD（SSS 全等性質），

故$\angle ABE=\angle ACF$（對應角相等）。

(2)在△ABE 與△ACF 中，

∵ $\angle BAE=\angle CAF$，$\overline{AB}=\overline{AC}$，

$\angle ABE=\angle ACF$，

∴△$ABE\cong$△ACF（ASA 全等性質），

故 $\overline{AE}=\overline{AF}$（對應邊相等）。

53 3.代數證明

◆即時演練

1.(1)偶

(2)奇

(3)偶

2.(1) $6x$，奇

(2) $(3x+8)$，偶

(3) $(4y-2)$，偶

◆類題 1

∵ a 是奇數，設 $a=2n+1$，n 是整數，

∴ $a^2+2a=(2n+1)^2+2(2n+1)$

$=4n^2+8n+3$

$=2(2n^2+4n+1)+1$

∵$2n^2+4n+1$ 為整數，

故 a^2+2a 是奇數。

◆熟練 1

奇數

∵a、b 皆為奇數，

∴設 $a=2m+1$，$b=2n+1$，

m、n 是整數，

∴$a\times b=(2m+1)\times(2n+1)$

$=4mn+2m+2n+1$

$=2(2mn+m+n)+1$

∵$2mn+m+n$ 為整數，

故 $a\times b$ 是奇數。

頁次

◆即時演練

∵ a 是偶數，設 $a=2n$，n 是整數，

∴ $a^2+3a=(2n)^2+3\times 2n$

$=4n^2+6n$

$=2(2n^2+3n)$

∵$2n^2+3n$ 為整數，

故 a^2+3a 是偶數。

54 ◆類題 2

∵$b^2-a^2=(b+a)(b-a)$

已知 $a>b$，∴$b-a$ 為負數，

又 $b+a$ 為負數，故 $b^2-a^2>0$，

即 $b^2>a^2$。

◆熟練 2

∵$a>b$，$a+a>b+a$，$2a>b+a$

∴$a>\dfrac{a+b}{2}$………①

∵$a>b$，$a+b>b+b$，$a+b>2b$

∴$\dfrac{a+b}{2}>b$………②

由①、②可知，$a>\dfrac{a+b}{2}>b$。

◆類題 3

∵△ABC 為直角三角形，

且 $a+8$ 為斜邊長，a、b 為兩股長，

∴ $(a+8)^2=a^2+b^2$

$a^2+16a+64=a^2+b^2$

$b^2=16a+64=16(a+4)$

故 16 為 b^2 的因數。

◆熟練 3

$a^2+6^2=(3b+15)^2$

$a^2=(3b+15)^2-6^2$

$=(3b+15+6)(3b+15-6)$

$=(3b+21)(3b+9)$

$=9(b+7)(b+3)$

∵$(b+7)(b+3)$ 為正整數，

故 a^2 是 9 的倍數。

頁次	
55	3-1 自我磨練

1. ∵$\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形，
∴$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AE}=\overline{AD}$，
在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ACD$ 中，
∵$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AE}=\overline{AD}$，$\angle A=\angle A$，
∴$\triangle ABE\cong\triangle ACD$（$SAS$ 全等性質），
故 $\overline{CD}=\overline{BE}$（對應邊相等）。
2. (1) 60，$\angle ACE$，$\angle ACE$，$\angle BCE$，
(2) $\overline{AC}=\overline{BC}$，$\angle ACD=\angle BCE$，
$\overline{CD}=\overline{CE}$，$SAS$

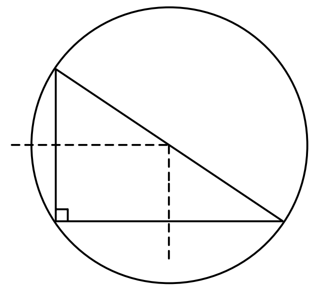
56 3. (1)∵G 為 $\overline{AD}$、$\overline{CF}$ 的中點，
∴$\overline{AG}=\overline{DG}$，$\overline{CG}=\overline{FG}$，
在 $\triangle ACG$ 與 $\triangle DFG$ 中，
∵$\overline{AG}=\overline{DG}$，
$\angle AGC=\angle DGF$，
$\overline{CG}=\overline{FG}$，
∴$\triangle ACG\cong\triangle DFG$，
故 $\angle A=\angle D$（對應角相等）。
(2) 在 $\triangle AGB$ 與 $\triangle DGE$ 中，
∵$\angle A=\angle D$，
$\overline{AG}=\overline{DG}$，
$\angle AGB=\angle DGE$，
∴$\triangle AGB\cong\triangle DGE$，
故 $\overline{BG}=\overline{EG}$（對應邊相等）。
4. ∵ a 是偶數，設 $a=2n$，n 是整數，
b 是奇數，設 $b=2m+1$，m 是整數，
∴ $a^2+5b=(2n)^2+5\times(2m+1)$
$=4n^2+10m+5$
$=2(2n^2+5m+2)+1$
∵$2n^2+5m+2$ 為整數，
故 a^2+5b 是奇數。
5. $A=(4a+7)^2+2(4a+7)+17$
$=16a^2+56a+49+8a+14+17$
$=16a^2+64a+80$
$=16(a^2+4a+5)$
∵a^2+4a+5 為正整數，
故 A 是 16 的倍數。

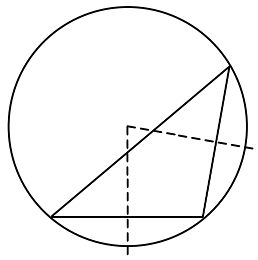
頁次	
57	3-2 三角形的心

1.外心

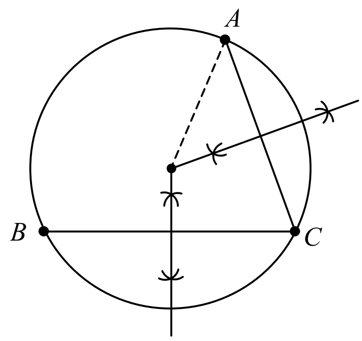
◆即時演練

1.





2.



58 ◆類題 1

$\frac{15}{2}$

◆熟練 1

4

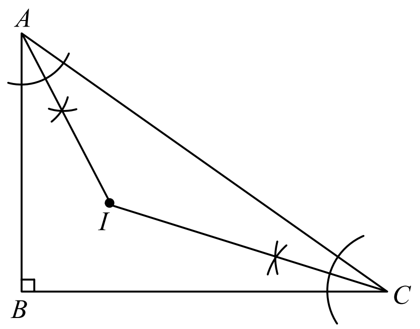
◆類題 2

$\frac{25}{2}$

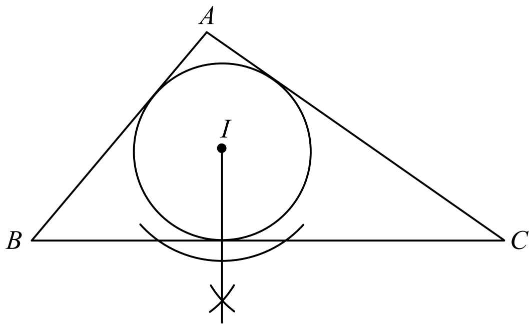
◆熟練 2

$\frac{625}{9}\pi$

頁次	
59	◆類題 3 94° ◆熟練 3 $\angle BOC=140°$，$\angle AOB=80°$ ◆類題 4 115° ◆熟練 4 60°
60	2.內心 ◆即時演練 1. I 即為所求。



2.圓 I 即為所求。



頁次	
61	◆類題 1 112° ◆熟練 1 7：6：5 ◆即時演練 1. 60° 2. 5：13：12
62	◆類題 2 4 ◆熟練 2 $\sqrt{2}$ ◆類題 3 4 ◆熟練 3 3
63	3.重心 ◆類題 1 $\overline{GD}=18$，$\overline{GE}=15$，$\overline{GF}=13$ ◆熟練 1 18 ◆即時演練 23
64	◆類題 2 16 ◆熟練 2 10 ◆類題 3 $\frac{13}{3}$ ◆熟練 3 10
65	◆類題 4 3 ◆熟練 4 $2\sqrt{2}$ ◆即時演練 (1) $\frac{17}{3}$　(2) 20
66	3-2 自我磨練 1. 45 2. 150° 3. $\frac{169}{24}$
67	4. 3 5.（-2，2） 6. 36° 7. 20 平方公分

memo

筆記欄

memo

筆記欄